Záró beszámoló a Csoportelmélet című, K84233 számú kutatási projektről

A projekt a csoportelmélet területén különböző intézményekben (MTA Rényi Alfréd Matematikai Kutatóintézet, ELTE TTK Algebra és Számelmélet Tanszék, Közép-Európai Egyetem Matematika és Alkalmazásai Tanszék) dolgozó kutatók összefogását tűzte ki célként. A kutatási tervben nyolc különböző problémakört körvonalaztunk, egyúttal azt is jeleztük, hogy a tudományterület fejlődése során felvetődő és csoportunk szakértelméhez illeszkedő újabb témák kutatásába is belefoghatunk. Ezeket a beszámoló végén ismertetjük, először a munkatervben megjelölt témákat vesszük sorra.

A projekt eredményeként 38 publikáció készült. Ezek közül kiemelkedik Pyber és Szabó 52 oldalas munkája, amelyet a világ egyik legjelentősebb matematikai folyóirata, a Journal of the American Mathematical Society közölt. Emellett számos más publikációnk is vezető nemzetközi folyóiratokban jelent meg, pl. Journal of Combinatorial Theory (Ser. A), Journal of Group Theory, Journal of Algebra, Combinatorica, Bulletin of the London Mathematical Society, Transactions of the American Mathematical Society, Advances in Mathematics stb.

1. *Növekedési tulajdonságok.* Pyber és Szabó a következő nagyjelentőségű eredményt bizonyították: Legyen L egy Lie-típusú egyszerű csoport, amelynek rangja r. Ekkor valamilyen csak r-től függő $c(r)$ 1-nél nagyobb kitevővel az L csoport bármely A generátorrendszerére teljesül, hogy az A-ból képezett háromtényezős szorzatok halmaza vagy az egész L csoportot kiadja, vagy elemszáma nagyobb mint A elemszámának $c(r)$-edik hatványa. Velük párhuzamosan hasonló eredményt ért el Breuillard, Green és Tao is.

A csoportbeli növekedési kérdésekkel kapcsolatos a közelítő részcsoport (approximate subgroup) fogalma, amikor a szorzat növekedése kismértékű. Helfgottnak a korlátos rangú lineáris csoportokban levő közelítő részcsoportokra vonatkozó sejtését sikerült visszavezetnünk a feloldható csoportok esetére.

A csoport-növekedés témájában a berkeley-i Mathematical Sciences Research Insitute-ban rendezett konferencia kiadványában jelent meg egy áttekintő cikkünk, amelynek új eredményei közé tartozik a lineáris csoportok nem növő részhalmazainak leírása.

2. *Részcsoporthálók.* Tulajdonképpen a részcsoporthálókkal kapcsolatos kérdés, hogy a csoportot hány részcsoportjával lehet lefedni. Maróti és Britnell számos esetre meghatározta, hogy a $\mathrm{GL}(n, q)$ teljes lineáris csoport hány valódi részcsoportjának konjugáltjaival fedhető le.

3. *Szofikus csoportok és hatások.* Ebben a témában nem sikerült előrelépnünk.

4. *Cayley gráfok izomorfizmusproblémája.* Somlai meghatározta, hogy mely $8p$ ($p > 2$ prímszám) rendelkeznek a CI (Cayley Izomorfizmus) tulajdonsággal.

5. *Lineáris p-csoportok konjugáltosztályainak száma.* A témát kiterjesztve más csoportban is vizsgáltuk a konjugáltosztályok számát. Legyen G egy véges csoport és p egy G rendjét osztó prímszám. Maróti olyan éles alsó korlátot bizonyított G konjugáltosztályainak számára, amely egyedül p függvénye. Maróti és Garonzi — korábbi eredményeket élesítve — megmutatták, hogy egy n-edfokú permutációcsoport konjugáltosztályainak száma legfeljebb $5^{n/3}$. Tetszőleges π prímhalmaz esetén vizsgáltuk a csoport π-elemeiből álló konjugáltosztályok számát.

6. *Loop-ok.* A munkatervben jelzett egyik vizsgálandó probléma volt, hogy páratlan elemszámú Moofang loop-ok nukleusza mindig nemtriviális-e. Azt sikerült bebizonyitani, hogy páratlan elemszámú Moofang loop-okban a relatív prím rendű elemek felcserélhetősége ekvivalens a loop nilpotenciájával. Ennek vizsgálata során elégséges (és esetenként szükséges) feltételek adódtak nemtriviális nukleusz létezésére. A bizonyításban a most bevezetett kommutáns-nilpotencia fogalma volt az alapvető eszköz, ami egyébként páratlan elemszámú Moufang loopok esetében ekvivalensnek bizonyult a szokásos centrális nilpotenciával.

Csörgő foglalkozott automorf loopokkal, azaz olyanokkal, amelyeknek minden belső leképezése automorfizmus. Bebizonyította, hogy ha a loop elemeinek száma egy prímszám négyzete, akkor a loop asszociatív, azaz csoport. A másik dolgozatban általánosan igazolta, hogy minden automorf loopra teljesül az elemenkénti Lagrange tulajdonság.

7. *A $k(GV)$ probléma általánosításai.* Az eredeti $k(GV)$ problémában a G csoportnak és a V vektortérnek az elemszáma relatív prím egymáshoz. Maróti Guralnickkal közös dolgozatában ejti ezt a feltevést, helyette azt a gyengébb követelményt teszi, hogy G hatása teljesen reducibilis G-n. Abban az esetben sikerült eredményt elérniük, amikor G feloldható és primitíven hat V-n. Ide kapcsolódnak a bázisszámmal kapcsolatos vizsgálataink is. Halasi és társszerzői igazolták, hogy hű relatív prím lineáris hatás esetén a bázisszám legfeljebb kettő, azaz található két olyan vektor, amelyek stabilizátorainak metszete csak az egységelemet tartalmazza. Ezt azóta többen felhasználták, pl. Sambale éppen Brauer $k(B)$ sejtésének vizsgálatában. Általánosítottuk Halasi és Podoski korábbi eredményét, feloldható helyett olyan p-feloldható lineáris csoportokra (p az alaptest karakterisztikáját jelöli), amelyekben nincs nemtriviális p-normálosztó. Igazoltuk, hogy ilyenkor a minimális bázis mérete legfeljebb 3.

8. *Racionális csoportok.* A racionális csoportok általánosításaként olyan csoportokkal foglalkoztunk, amelyekben minden elem konjugált egy rögzített kitevőjű hatványával. A feloldható csoportok körében azt sikerült kimutatni, hogy ilyen csoportoknál a csoport rendjének prímosztói vagy kicsik, vagy aritmetikailag kicsik, azaz a rögzített kitevő rendje kicsi a csoport rendjét osztó minden prímszámra, mint modulusra nézve.

További témák, amelyekben dolgoztunk.

Összeghalmazok torziómentes csoportokban. Pálfy Böröczkyvel és Serraval azt bizonyította be, hogy torziómentes csoportok A és B véges részhalmazaira AB elemszáma A és B elemszámának összegét legalább B elemszámának hatodik gyökével meghaladja, kivéve persze ha A egy ciklikus részcsoport mellékosztályában van. Ha a csoportra az egyértelmű szorzat tulajdonság is teljesül, akkor még erősebb becslést sikerült adni. Additív kombinatorikai eredmények nem-kommutatív változataival kapcsolatban egy másik irányban is értünk el eredményeket. Ez Liebeck, Nikolov és Shalev egy egyszerű csoportok szorzatfelbontásaira vonatkozó sejtéséhez kapcsolódik, amit a korlátos rangú esetben sikerült igazolni.

Csoportok szorzatelőállításai. Maróti és külföldi társszerzői mások korábbi eredményeivel kapcsolatosan megmutatták, hogy minden véges egyszerű Lie típusú csoport előáll, mint négy unipotens Sylow részcsoport szorzata. Egy másik dolgozatban azt igazolták, hogy minden olyan csoport, amely rendelkezik BN-párral és a Weyl csoportja véges, előáll három B-vel konjugált részcsoport szorzataként. Ezt az eredményt aztán arra használták, hogy megmutassák, hogy minden nem feloldható véges csoport előáll három, egymással konjugált valódi részcsoportjának a szorzataként.

A konjugáltosztályok expanziója. Maróti Halasival, Sidkivel és Bezeraval azt a kérdést vizsgálta, hogy mikor igaz egy csoport minden normális részhalmazára és minden konjugáltosztályára, hogy a normális részhalmaznak a kiválasztott konjugáltosztállyal vett szorzata legalább annyi konjugáltosztályból áll, mint a kiindulásul vett normális részhalmaz. Azt találták, hogy ezek a csoportok egyszerű csoportoknak és kommutatív csoportoknak a direkt szorzatai.

A konjugáltosztályok expanziójára vonatkozó témát karakterekre átfogalmazva kezdtük vizsgálni a karakterek expanzióját. Azt sejtjük, hogy minden karakter-expanzív csoport Abel-féle, illetve egyszerű csoportok direkt szorzata. Az eddig elért részeredményekről már elkészült egy dolgozat.

Direkt hatványok generátorszáma. Wiegold kérdezte, hogy az egyszerű csoportok mekkora direkt hatványai generálhatók még 2 elemmel. A kérdés lényegében azzal ekvivalens, hogy milyen explicit alsó korlát adható arra, hogy két véletlenül választott elem mekkora valószinűséggel generálja az adott véges egyszerű csoportot. Maróti Tamburinival közösen igazolt ilyen korlátot, ezzel meválaszolva Wiegold kérdését.

Affin csoportok komplementumai. Olyan affin csoportokat vizsgáltunk, amelyek minden eltolást tartalmaznak. Az eltolások csoportjának különböző komplementumai izomorfak, de nem feltétlenül konjugáltak a csoportban. Ily módon a komplementumnak sok, páronként nem izomorf modulushatását kapjuk a vektortéren. Ezekről a modulusokról megmutattuk, hogy nagyban hasonlítanak egymáshoz, például kanonikus faktoraik mind izomorfak.

Tökéletes számok és csoportok. Leinster vezette be a tökéletes számok csoportelméleti megfelelőjét. Maróti De Medtsszel közös munkájában számítógépes módszerek alkalmazásával újabb ilyen tulajdonságú csoportokat talált.

Volterra deriválás konstansainak gyűrűje. Hegedűs pontosan leírta ezt a gyűrűt és ezáltal sikerült igazolnia Zielinski sejtését, miszerint ez minden esetben egy polinomgyűrű. Később ezt általánosítottuk tetszőleges Lotka-Volterra deriválásra.

Vizsgáltuk Gluck sejtését, ami szerint minden feloldható csoportnak van olyan komplex irreducibilis reprezentációja, amelynek dimenziója legalább a Fitting részcsoport indexének négyzetgyöke. Bizonyos esetekben sikerült a sejtést igazolni, továbbá nem feloldható csoportokra is megkiséreltük a legnagyobb dimenziójú irreducibilis reprezentáció nagyságának becslését. Az egyszerű csoportok irreducibilis reprezentációinak maximális dimenziójára vonatkozóan Isaacs fogalmazott meg egy sejtést, amit Larsen, Malle és Tiep a Lie-típusú, valamint a sporadikus egyszerű csoportok esetén igazolt. Halasi társszerzőkkel bizonyította a sejtést az alternáló csoportok eddig hiányzó esetére is.

Megvizsgáltuk, hogy a csoportnak az a numerikus invariánsa, hogy az irreducibilis reprezentációk dimenzióinak összegét osztjuk a csoport elemszámával, milyen információt ad a csoportról, például mikor lesz a csoport feloldható.

Definiáltunk egyfajta dualitást nem-kommutatív csoportokra azáltal, hogy bizonyos esetekben a karaktertáblázatot egy egyszerű súlyozás után transzponálva szintén karaktertáblázatot nyerünk. Sikerült behatárolni az ilyenfajta duálissal rendelkező csoportok körét.

Az S-kvázinormális részcsoport fogalmát Kegel vezette be 1962-ben, nagyszámú dolgozat foglalkozott azóta ezzel a fogalommal. Csörgő Asaaddal közös munkájában azokat a csoportokat jellemezte, amelyekben az általánosított Fitting részcsoport adott elemszámú p-részcsoportjai valamennyien S-kvázinormálisak.

Síkgörbékre vonatkozólag a következő csoportelméleti eredményt sikerült belátni. Adott háromszor n síkgörbe úgy, hogy a háromszoros pontok száma n-ben legalább kvadratikus. Ekkor (bizonyos technikai feltételek mellett) a görbék rendszere egy algebrai csoportból származtatható egy viszonylag egyszerű geometriai konstrukcióval.

Hegedűs és Pyber belátták, hogy ha egy G véges csoport Noether indexe (ami a csoport rendjének és a Noether számnak a hányadosa) k akkor G-nek van legfeljebb $f(k)$ indexű ciklikus részcsoportja.