Az NK-81402 számú OTKA pályázat zárójelentése

Témavezető neve: Dr. Páles Zsolt, az MTA doktora, egyetemi tanár

Téma címe: *Függvényegyenletek és egyenlőtlenségek*

Kutatás időtartama: 2010.07.01–2014.12.31

Az elért eredmények rövid ismertetése:

A kutatási pályázat 25 kutató tevékenységét fogta össze és támogatta. A kutatócsoport tagjai a 2012.07.01–2013.06.30 időszakban referált nemzetközi folyóiratban 158, referált konferencia kiadványban vagy könyvfejezetben 7 tudományos dolgozatot, továbbá 5 monográfiát, 2 szerkeszett könyvet és 5 PhD, valamint 1 habilitációs értekezést készítettek és védtek meg.

A kutatócsoport 5 sikeres nemzetközi konferenciát rendezett a pályázat futamideje alatt. 2012. és 2014. januárjának végén megrendeztük a három napos 12., illetve 14. *Debrecen-Katowice Winter Seminar on Functional Equations and Inequalities*-t, amelyen 15-15 debreceni, illetve katowicei kutató vett részt és tartott előadást. 2012. júniusában pedig nagy sikerrel bonyolítottuk le az egy hetes 50. (jubileumi) *Nemzetközi Függvényegyenletek Szimpóziumot (International Symposium on Functional Equations)*, amelyen 24 magyar és 51 külföldi között a kutatócsoportból 15-en vettek részt, illetve számoltak be legfrissebb eredményeikről. Az 54., a 2016-os Nemzetközi Függvényegyenletek Szimpózium rendezési jogát időközben elnyertük. 2010. és 2014. szeptemberében ismét megszerveztük az egy hetes *Conference on Inequalities and Applications* konferenciákat. A 2010-ben rendezett Conference on Inequalities and Applications konferencia kötete [5] a Birkhäuser kiadó gondozásában, C. Bandle, Gilányi A., Losonczi L. és M. Plum szerkesztésében 2012-ben jelent meg. A 2012-ben tartott 14. International Conference on Functional Equations and Inequalities konferencia kötete [21] a varsói Banach Center kiadásában 2013-ban J. Brzdęk, J. Chmieliński, C. Ciepliński, R. Ger, Páles Zs. és M.C. Zdun szerkesztésében jelent meg.

Az alábbiakban a fontosabb kutatási irányonként csoportosítva és részletezve ismertetjük a kutatócsoport tevékenységét.

1. Függvényegyenletek megoldási módszerei. Az egyváltozós függvényegyenletek kisszámú általános megoldásai módszerei közé tartoznak az olyan egyenletek, amelyekben helyettesítések egy csoportját alkalmazva, az ismeretlen függvényt egy lineáris, vagy nemlineáris egyenletrendszer megoldása révén lehet meghatározni. Az ilyen függvényegyenletek megoldásának létezésere és egyértelműségére sikerült feltételeket nyerni a lineáris esetben a (Bessenyei, [7]) és a nemlineáris esetben a (Bessenyei–Kézi, [10]) dolgozatokban. A módszer további általánosításával egzisztencia és unicitási tételeket nyertünk az ilyen egyenletek egy tág osztályában (Bessenyei–Horváth–Kézi, [9]) és (Bessenyei–Kézi, [11]). A konstansegyütthatós lineáris függvényegyenletek megoldási algoritmusának számítógépes implementációját a (Borus–Gilányi [18]) dolgozatban dolgoztuk ki.

A polinomiális függvények Noether-gyűrűit jellemeztük a (Székelyhidi, [161]) dolgozatban. A (Székelyhidi, [160]) dolgozatban a valós számok halmazán értelmezett és átlagban periodikus függvények terén olyan egyértelműen meghatározott polinom értékű eltolásinvariáns lineáris operátor létezését sikerült igazolni, amely a polinomokat fixen hagyja. Ennek segítségével a Fourier-transzformáció az átlagban periodikus függvények terére is kiterjeszthető. A (Székelyhidi, [162]) dolgozatban igazoltuk, hogy egy kommutatív csoportban a spektrálszintézis teljesülésének szükséges és elegendő feltétele az, hogy a csoporton értelmezett polinomiális függvények gyűrűje Noether-féle legyen. A spektrálanalízis és a spektrálszintézis függvényegyenletek megoldására való alkalmazását tárgyalja a (Székelyhidi, [163]) összefoglaló jellegű dolgozat. A kommutatív hipercsoportokban a spektrálanalízis teljesülését mutattuk ki a (Székelyhidi–Vajday, [174]) dolgozatban. A momentum függvények spektrálanalízis segítségével történő meghatározását a

(Székelyhidi–Vajday, [177]), a polinomiális és Sturm–Liouville hipercsoportokon a momentum probléma vizsgálatát a (Székelyhidi–Vajday, [175]), az $SU(2)$-hipercsoportokon az alapvető függvényegyenletek megoldását a (Székelyhidi–Vajday, [176]) dolgozatok tárgyalják. Hipercsoportok felett feltételesen teljesülő függvényegyenleteket vizsgáltunk a (Székelyhidi–Vajday, [178]) cikkben. A kommutatív hipercsoportok feletti exponenciális függvények leírását, illetve karakterizációit adtuk meg a (Székelyhidi, [164], [165] és [170]) dolgozatokban. A Levi-Civita függvényegyenletnek a vektormodulusok feletti vizsgálatát a (Székelyhidi, [168]) cikkben végeztük el. A spektrál szintézis teljesülésének az ún. annihilátor módszerek segítségével való vizsgálatát adtuk (Székelyhidi, [169])-ben. A (Székelyhidi, [172]) cikkben a Fréchet-egyenlet kétféle alakjának az ekvivalenciáját mutattuk ki a spektrál analízis segítségével. Egy az exponenciális függvényekre teljesülő egyenletet vizsgáltunk a (Székelyhidi, [173]) dolgozatban. A (Horváth–Székelyhidi–Wilkens, [78]) cikkben a folytonos függvények terének olyan eltolásinvariáns lineáris zárt altereit vizsgáltuk amelyekben nem teljesül a spektrálszintézis.

Székelyhidi Lászlónak 2013-ban és 2013-ban a World Scientific kiadó gondozásában 2 monográfiája jelent meg. A [166] könyv a hipercsoportok feletti függvényegyenletek, speciálisan monom- és polinomegyenletek, Cauchy-típusú függvényegyenletekkel kapcsolatokban a szerző által elért eredményeket foglalja össze. A [171] monográfia a harmonikus analízis és a spektrál analízis átfogó tárgyalását adja és bemutatja ezek alkalmazását a függvényegyenletek elméletére.

A (Kocsis, [85]) dolgozatban megmutattuk, hogy additív függvények egy n-tagú rendszere pontosan akkor lineárisan függő, ha létezik egy olyan n-változós indefinit kvadratikus forma, amibe ezeket helyettesítve egy azonosan nemnegatív függvényt kapunk.

A (Gselmann, [63]) cikkben a derivációknak egyetlen függvényegyenlettel történő jellemzését sikerült megtalálni. Az n-ed rendű approximatív derivációk egy jellemzését a (Gselmann, [67]) cikk tartalmazza. A (Gselmann–Fechner, [44]) dolgozatban pedig az olyan „alien”-tipusú függvényegyenletek általános megoldását sikerült leírni, amelyek a Cauchy- és Leibniz-differencia összehasonlításából keletkeznek. A parciális differencia egyenletek egy osztályának megoldási módszereit, illetve a diszkrét hullámegyenlet megoldását dolgozták ki a (Gselmann, [65] és [70]) cikkek. A pozitív definit mátrixok Jordan-tripla automorfizmusait a (Gselmann, [69]) dolgozatban adtuk meg.

A (Lajkó–Mészáros, [90]) dolgozatban a „pexiderizált” Hosszú-egyenlet több speciális esetét sikerült általánosan megoldani. A probléma megoldása teljes általánosságban még nyitott.

Egy függvényösszetételeket tartalmazó függvényegyenlet algebrai megközelítéseken alapuló vizsgálatát (Burai–Házy–Juhász, [30])-ben végeztük el.

2. Függvényegyenletek reguláris megoldásai. A gyengén szubkvadratikus függvények (Gilányi–Troczka-Pawelec, [51]) és egy általános függvényegyenlet (Járai, [82]) regularitási feltételeknek eleget tevő megoldásait írtuk le. A (Lajkó–Mészáros, [88]; Járai–Lajkó–Mészáros, [84]) dolgozatokban a valószínűségeloszlások karakterizációs problémájából származó multiplikatív típusú majdnem mindenütt teljesülő függvényegyenletek mérhető megoldásait sikerült meghatározni. Az általános (de nem mm. azonosan zéró) megoldásokat a (Lajkó–Mészáros, [89]) dolgozatban írtuk le. A „kevés” változóval rendelkező függvényegyenletek vizsgálatában értünk el eredményeket a (Járai, [83]) cikkben.

3. Függvényegyenletek és karakterizációs problémák. A Shannon- és Rényi-entrópiák, valamint a relatív entrópiák jellemzésével, illetve az itt keletkezett függvényegyenletek stabilitásával kapcsolatban születettek a (Gselmann, [61], [62]) és a (Gselmann–Maksa, [71], [72]) dolgozatok. A pozitív valós számok multiplikatív részcsoportjainak és az információ-függvényeknek egy kapcsolatát találtuk meg a (Maksa, [98]) cikkben.

A (Gselmann, [64]) cikkben a racionális függvények gyűrűje feletti derivációkat és lineáris függvényeket határoztuk meg. A (Maksa, [97]) cikkben az olyan additív függvényeket jellemeztünk, amelyek valamilyen megadott elemi függvényt jól differenciálnak. A valószínűségszámítás fontos eloszlásainak (általánosított béta és gamma eloszlásoknak) a függvényegyenletekkel leírható jellemzését adtuk a (Mészáros, [128]) disszertációban és a (Lajkó–Mészáros, [87]) könyvben. A (Lajkó–Mészáros–Pap, [91]) dolgozatban bizonyos kétváltozós valószínűségeloszlások jellemzését sikerült megadni. A CES függvények leírását a (Losonczi, [92]) dolgozatban írtuk le.

A polinomokat karakterizáló új függvényegyenletet adtunk meg a (Boros–Fechner, [15]) cikkben. A lokális polinomokkal kapcsolatos Montel-típusú tételeket értünk el az (Almira–Székelyhidi, [1]) dolgozatban.

A norma- és belsőszorzattartó leképezéseknek egy új jellemzését találtuk a (Maksa–Páles, [100]) cikkben.

4. Függvényegyenletek stabilitása. A derivációk stabilitását a (Boros–Gselmann, [16]) dolgozatban, az információ általánosított alapegyenletének Hyers–Ulam-féle értelemben vett stabilitását pedig a (Gselmman, [60], [59]) dolgozatokban vizsgáltuk. Az információ általánosított alapegyenletének Hyers–Ulam-féle értelemben vett stabilitásával kapcsolatos eredményeket foglalja össze a (Gselmman, [61]) disszertáció, amely könyv alakban is megjelent (Gselmman, [66]).

Az abszolútérték-függvény egyenletének stabilitását a (Gilányi–Nagatou–Volkmann, [50]) dolgozatban igazoltuk. A Gavruţa-féle stabilitási tétel egy új megközelítését nyújtja a (Gselmann–Száz, [73]) cikk. A Hyers–Ulam stabilitási tételnek és a Hahn–Banach tételnek a kapcsolatát írja le a (Glavosits–Száz, [54]) dolgozat. A lineáris függvényegyenletek stabilitásának vizsgálatára fixpont-tételeket alkalmaztunk a (Brzdęk–Chudziak–Páles, [22]) dolgozatban. A (Fošner–Ger–Gilányi–Moslehian, [46]) dolgozatban megmutattuk, hogy bizonyos lineáris függvényegyenletek stabilitása ekvivalens azzal, hogy a függvények értékkészletéül szolgáló normált tér teljes legyen.

5. Közepek egyenlősége, összehasonlítása, invariancia egyenletek. A káziaritmetikai közepek különféle általánosításaival kapcsolatos egyenlőségi problémát oldottunk meg a (Daróczy, [32]), (Daróczy–Dascăl, [34]), (Losonczi–Páles, [94]) dolgozatokban. A (Losonczi–Páles, [95]) dolgozat eredményei Minkowski-típusú egyenlőtlenségek teljesülésére adnak szükséges és elegendő feltételeket. A (Baják–Páles, [3]) cikkben a Stolarsky-közepekre teljesülő invariancia egyenletet oldottuk meg komputer-algebrai eszközök felhasználásával. A (Maksa–Varga, [102]) dolgozat két invariancia egyenletekkel kapcsolatos függvényegyenlet ekvivalenciáját igazolja. A kváziaritmetikai és Lagrange-közepek egyenlőségének 6 lehetséges esetét sikerült igazolni (Páles, [132])-ben. Az általánosított kváziaritmetikai (Matkowski) közepek és a Gini-, valamint Stolarsky-közepekre teljesülő invariancia egyenleteket komputer-algebrai eszközök felhasználásával vizsgáltuk, illetve oldottuk meg. A vegyesen előforduló Gini-, illetve Stolarsky-közepeket tartalmazó probléma megoldását a (Baják–Páles, [4]) dolgozatban írtuk le. Az elért eredmények összegzését tartalmazza a (Baják, [2]) PhD disszertáció.

Az n-változós konjugált közepek egyenlőségi problémáját oldja meg, illetve a szimmetrikus bináris műveletekkel kapcsolatos függvényegyenletekre vizsgálatával foglalkoznak a (Daróczy–Dascăl, [36], [35]) dolgozatok. Az invariancia egyenlet általánosított súlyozott kváziaritmetikai közepes változatát a (Dascăl–Jarczyk, [41]) cikkben vizsgáltuk. Ezeknek az eredményeknek az összefoglalásából született a (Dascăl [40]) disszertáció. Egy összehasonlítható közepekre vonatkozó egyenlőtlenséget oldottunk meg a (Daróczy–Maksa, [37]) dolgozatban. A (Burai–Dascăl, [27]) cikkben a konjugált kváziaritmetikai közepekkel kapcsolatos egyenlőségi probléma megoldását határoztuk meg. Az invariancia egyenlet egy speciális esetét, a Matkowski–Sutô egyenletet a (Burai, [23]) dolgozatban oldottuk meg a súlyozott kváziaritmetikai közepek osztályában. A számtani és mértani közepek Gauss-kompozíciójával kapcsolatos két függvényegyenlet ekvivalenciáját vizsgáltuk és igazoltuk a (Daróczy, [33]) és a (Maksa–Varga, [102]) cikkekben.

A közepek konjugálásának általánosításának szükséges és elegendő feltételeit sikerült tisztázni a (Daróczy–Páles, [38]) dolgozatban. Az általánosított kváziaritmetikai közepek egy osztályában a homogén közepeket a (Losonczi, [93]) cikkben találtuk meg.

6. Konvexitás általánosításai, stabilitása, alkalmazásai. Az approximatíven h-konvex függvények tulajdonságainak vizsgálata (Burai–Házy, [28])-ben, a Bernstein–Doetsch-tétel h-konvex, illetve (h,k)-konvex függvényekre való kiterjesztése (Házy, [79]) és (Házy, [80])-ben történt meg. Az approximatívan Breckner s-konvex függvények tulajdonságainak vizsgálata, illetve egy Bernstein–Doetsch típusú tételt értünk el a (Burai–Házy–Juhász, [29]) cikkben. Az approximatívan Jensen-konvex függvények vizsgálatában fellépő Takagi-típusú függvények segítségével megadható hibatag optimalitását igazoltuk (Makó–Páles, [105])-ben. Az erős és az approximatív konvexitás hibatagjának javítását, optimalizálását sikerült megtalálni a (Makó–Páles, [106]) cikkben. A különféle általános konvexitási fogalmakhoz tartozó affin függvények teljes leírását adtuk meg a (Maksa–Páles, [99]) dolgozatban. Egy általános hibafüggvénnyel teljesülő approximatív konvexitást jellemeztük az egyik (Makó–Páles, [109]) dolgozatban. Az erős (α, F)-konvexitás szükséges és elegendő feltételeit egy alkalmas szubdifferenciál tulajdonság segítségével írtuk le (Makó–Nikodem–Páles, [104])-ben. A két további (Makó–Páles, [107], [108]) dolgozatokban az approximatív alsó-, illetve felső-Hermite–Hadamard egyenlőtlenség és az approximatív Jensen-konvexitás és konvexitás kapcsolatát találtuk. Mindkét vizsgálathoz egy iterációs technikát kellett kifejleszteni. Az egyik ilyen iterációs eljárás a klasszikus Korovkin-tétel egy újfajta általánosítását is jelenti. Egy általános hibafüggvénnyel teljesülő approximatív konvexitás következményeként adódó Hermite–Hadamard-típusú egyenlőtlenségeket adtuk meg a (Makó–Páles, [110]) dolgozatban. A Takagi-függvények egy általánosításának sikerült kimutatni – alkalmas hibatag mellett – a közelítő konvexitását a (Makó–Páles, [111]) cikkben. Ebből az eredményből, többek között az is következik, hogy amikor egy közelítő konvexitási tulajdonság hibatagja ilyen Takagi-típusú függvény segítségével adható meg, akkor ez a hibatag már éles, azaz tovább már nem csökkenthető. A közelítő konvexitással kapcsolatos eredmények összefoglalásából készítette el és védte meg Makó Judit a (Makó, [103]) disszertációt. Az approximatívan Jensen-konvex és Jensen-konkáv halmazértékű leképezésekre vonatkozó Bernstein–Doetsch-típusú tételeket nyertünk „Takagi-típusú" hibataggal a (González–Nikodem–Páles–Roa, [58]) dolgozatban. A (Boros–Nagy, [17]) dolgozatban olyan approximatív konvexitási tulajdonságokat vizsgáltunk, amelyekről bebizonyítható, hogy ekvivalensek a standard konvexitással.

A belsőszorzat-tereket jellemeztük az erős konvexitás fogalmának felhasználásával a (Nikodem–Páles, [131]) cikkben. A magasabb rendben és erősen Wright-konvex függvények felbontási tételét és különféle jellemzéseit találtuk meg a (Gilányi–Merentes–Nikodem–Páles, [49]) dolgozatban. A (Páles, [133] páratlan n esetén sikerült olyan n-ed rendben Jensen-konvex függvényt konstruálni, ami nem n-ed rendben Wright-konvex.

A (Bessenyei–Páles, [12]) dolgozatban annak szükséges és elegendő feltételét találtuk meg, hogy két valós függvény között mikor található egy adott n-dimenziós Csebisev-rendszer elemeinek lineáris kombinációja. Speciális esetként innen a polinomiális szeparáció feltételei is adódnak. A (Bessenyei, [8]) habilitációs disszertáció ezeket az eredményeket, továbbá a konvex és konkáv függvényekkel való szeparáció feltételeit is vizsgálja, illetve adja meg. A (Bessenyei–Szokol, [14]) dolgozatban annak szükséges és elegendő feltételét találtuk meg, hogy két valós függvény mikor szeparálható egy konvex interpolációs család valamely tagjával. A konvex szeparáció létezésének a kritériumát a (Bessenyei–Szokol, [13]) dolgozat tárgyalja.

A középcsaládokra nézve konvex függvények regularitási tulajdonságait vizsgáltuk (Maksa–Páles, [101])-ben.

A kommutatív félcsoportokban a halmazok konvexitásának kétféle fogalmát vezettük be és kimutattuk ezek duális jellegét a (Jarczyk–Páles [81]) dolgozatban.

A szubkvadratikus és a gyengén szubkvadratikus függvények osztályai között kapcsolatot sikerült tisztázni a (Gilányi–Kézi–Troczka-Pawelec, [48]) cikkben.

7. A pozitív definit operátorok és az eloszlásfüggvények terének invariáns leképezései. Az eloszlásfüggvények terének Lévy-metrikára, illetve Kolmogorov–Szmirnov-metrikára való izometriáit, továbbá affin automorfizmusait írtuk le (Molnár [113], [114])-ben. A (Molnár, [116]) cikkben a pozitív definit operátorok terének rendezéstartó automorfizmusait adtuk meg. A (Molnár, [117] és [120]) dolgozatokban a Hilbert-terek unitér operátorai csoportjának, illetve a pozitív definit mátrixok terének Jordan-féle hármasszorzatra nézve vett endomorfizmusait és izometriáit írtuk le. A (Molnár, [118]) cikkben új szükséges és elegendő feltételeit találtuk annak, hogy egy C^*-algebra kommutatív legyen. A (Molnár, [119])-ben pedig a $B(H)$ tér bilokális $*$-atumorfizmusait vizsgáltuk. A (Botelho–Jamison–Molnár, [19]) dolgozatban bizonyos operátor struktúrák izometria és automorfizmus csoportjainak algebrai reflexivitását mutattuk meg. A (Beneduci–Molnár, [6]) cikkben a C^*-algebrák pozitív invertálható elemeinek K-loop struktúráját vizsgáltuk.

A (Molnár, [112], [115]) dolgozatokban mátrixok, illetve pozitív operátorok olyan leképezéseit sikerült leírni, amelyek megőriznek bizonyos középértékeket. A (Molnár–Timmermann, [126]) cikkben az ún. kompatibilitási mértéket megőrző leképezéseket sikerült meghatározni. A (Dolinár–Molnár, [42]) cikkben a véges dimenziós Hilbert-terek effekt-algebráinak szekvenciális endomorfizmusait írtuk le. A pozitív szemidefinit operátorok logaritmikus szorzatára nézve vett automorfizmusokat sikerült meghatározni a (Dolinar–Molnár, [43]) cikkben. A (Molnár–Nagy, [121]) dolgozatban a sűrűség-operátorok relatív entrópiát megőrző leképezéseit jellemeztük, a (Molnár–Nagy, [122]) cikkben pedig a sűrűség-operátorok olyan transzformációit írtuk le, amelyek a Holevo-korlátot invariánsan hagyják. Hilbert-terek unitér operátor-csoportjának különböző algebrai műveleteket (pl. szorzat, Jordan-hármas szorzat, multiplikatív kommutátor) megőrző transzformációit határoztuk meg a (Molnár–Semrl, [127]) cikkben, a (Hatori–Molnár, [76], [77]) dolgozatokban pedig ennek a csoportnak az izometriáit, illetve a C^*-algebrák invertálható elemeinek Thompson-izometriáit írtuk le.

A (Hatori–Hirasawa–Miura–Molnár, [75]) cikkben megadtuk az olyan izometriák és leképezések teljes leírását, amelyek kompatibilisek az ún. Jordan-féle hármasszorzattal. A sűrűségi operátorok terén értelmezett a kvantum f-divergenciákat megőrző leképezéseket a (Molnár–Nagy–Szokol, [123]) dolgozatban határoztuk meg. A (Molnár–Szokol, [124] és [125]) cikkekben az általánosított eloszlásfüggvények terének Kolmogorov–Smirnov izometriáit, illetve a pozitív definit mátrixok terének általánosított távolságokat invariánsan hagyó transzformációit határoztuk meg. A (Botelho–Jamison–Molnár, [20]) dolgozatban a Grassmann terek szurjektív izometriáit adtuk meg. A (Nagy, [129]) cikkben leírtuk az egységnyi normájú operátorok terének izometriáit, a (Nagy, [130]) dolgozatban pedig a lineáris operátorok lineáris kombinációjának Schatten-féle p-normáját megőrző leképezéseket határoztuk meg. A (Gehér–Nagy, [47]) cikkben a Hilbert-terek operátorainak olyan transzformációit jellemeztük, amelyek a kommutativitás mértékét invariánsan hagyják.

8. Az általánosított deriváltak, nemsima analízis A lokálisan Lipshcitz Banach-terek között ható leképezésekre a Clarke-féle derivált és a Mordukhovich-féle ko-derivált általánosítását jelentő koderivált fogalmat, kalkulus szabályokat, jellemzési tételeket nyertünk a (Páles–Zeidan, [136]) cikkben. A (Páles–Zeidan, [137]) dolgozatban pedig az értékkészlet duális terének V alterei segítségével értelmezett derivált fogalom tulajdonságait tanulmányoztuk. A (Burai, [24], [25], [26]) dolgozatokban nemlineáris optimalizálási problémákban a lokális és globális optimalitás feltételeit nemkonvexitási és nemdifferenciálhatósági feltételek mellett tanulmányoztuk.

9. Relátorterek. A vektor-relátorterek elméletének alapjait dolgozza ki a (Száz, [144]) dolgozat. A box és totalizációs relációkra vonatkozó halmazműveleteket és azok tulajdonságait vizsgáltuk a

(Száz, [147], [155]) dolgozatokban. A postás, a radiális és a folyó metrikák egy közös általánosítását vezettük be és dolgoztuk ki az ezzel kapcsolatos fogalomrendszert a (Száz, [149]) cikkben. A (Száz, [150], [157] és [159]) cikkekben reláció-párok közötti Galois-kapcsolatokat és az ezekre vonatkozó folytonossági fogalmakat vizsgáltunk. Relációk alulról félig folytonossági tulajdonságait, ezek kapcsolatait és jellemzéseit adtuk meg a (Száz, [156]) összefoglaló dolgozatban. A Phelps–Cardwell lemma relációs átfogalmazását adja a (Száz, [158]) cikk. A rendezési és maximalitási elveknek egy Altman-féle általánosítását adja a (Száz, [143]) dolgozat.

10. Infimális és metszetes konvolúció és alkalmazásai. A metszetes konvolúció fogalmának bevezetése, alaptulajdonságai találhatók a (Száz, [146]) dolgozatban. Az infimális és a metszetes konvolúció kapcsolatát tárgyalja a (Figula–Száz, [45]) cikk. Az infimális konvolúció alkalmazását adja a Hahn–Banach féle kiterjesztési tétel és az ú.n. szendvics-tételek kapcsolatára a (Száz, [145]) dolgozat. Az infimális konvolúció értelmezési tartománya párosságának vizsgálatát adja a (Glavosits–Kézi, [52]) dolgozat. Ez az ún. Hahn–Banach típusú kiterjesztési tételekben az egyértelmű kiterjeszthetőséghez fontos feltétel. A (Száz, [148]) cikkben egy inverziónak nevezett leképezéssel ellátott halmazokat, illetve részben rendezett halmazokat vizsgáltunk. A (Száz, [151]) (terjedelmes) dolgozatban a Hyers–Ulam-féle stabilitási tétel és a Hahn–Banach-féle elválasztási tétel, valamint néhány ezekkel természetes kapcsolatba hozható reláció kapcsolatát vizsgáltuk. A (Glavosits–Száz, [53], [55]) cikkekben a Hahn–Banach tételnek, illetve a monoton kiterjesztési tételnek az infimális konvolúcióra épülő bizonyításait mutatja be. Az ezekkel összefüggő additív szelekciós és kiterjesztési tételekkel foglalkoznak a (Száz, [153] és [154]) dolgozatok.

A (Glavosits–Száz, [57]) dolgozatban szabad és kontrollált additív relációk konstrukciójával és az ezekre vonatkozó kiterjesztési tételekkel foglalkoztunk.

11. Finsler-terek. A Finsler-terek homotétikus leképezéseit írtuk le a (Lovas–Szilasi, [96]) cikkben. A (Szilasi–Tóth, [141]) dolgozatban Finsler-terek konformális vektormezőit vizsgáltuk és az affin vektormezők egy új karakterizációját találtuk. A (Szilasi–Lovas–Kertész, [138]) cikkben a Berwald-sokaságok egy Finsler-sokaságokon belüli lehetséges jellemzését írtuk le kimutatva, hogy a Finsler-sokaság alapfüggvényét megőrző affin konnexió létezéséből következik, hogy a metrika Berwald-féle. A (Szilasi-Tóth, [142]) dolgozatban az alapvető észrevétel az, hogy a Lie-szimmetriákra nézve a Jacobi-endomorfizmusok és a Berwald-görbület invariánsak, ez pedig további görbület-jellegű mennyiségek invarianciáját vonja maga után. A (Szilasi–Tamássy, [140]) dolgozatban a Minkowski- és az általánosított Berwald-terek közötti kapcsolatot vizsgáltuk és kimutattuk, hogy az utóbbi terek megkaphatók a Minkowski-terek affin deformációiként. Több éves munka eredményeként elkészült és a debreceni Finsler-geometriai iskola eredményeinek összefoglalását nyújtja a (Szilasi–Lovas–Kertész, [139]) könyv, amely a World Scientific kiadó gondozásában jelent meg 2014-ben.

12. Egyéb eredmények. A (Hannusch–Lakatos, [74]) dolgozatban eljárást adtunk önduális adott távolságú radikál 2-kódok konstrukciójára. A (Glavosits–Száz, [56]) cikkben grupoidok osztható és az egyszerűsítési szabálynak eleget tevő részhalmazait írtuk le. A Ricatti-féle differenciálegyenlet egy didaktikus megközelítését adja a (Száz, [152]) dolgozat. A (Páles–Petre, [134]) cikkben a vektorértékű metrikával ellátott terekbe képező (halmaz)értékű leképezésekre találtunk iteratív-típusú fixponttételeket. A (Daróczy, [39]), illetve a (Páles–Székelyhidi, [135]) dolgozatok Járai Antalt és Daróczy Zoltánt köszöntik 60., illetve 75. születésnapjukon legfontosabb tudományos eredményeik és azok hatásának bemutatásával.

Debrecen
2015. február 3.

Páles Zsolt
témavezető

A kutatócsoport által 2010–2014-ben megjelentetett könyvek, tudományos dolgozatok, disszertációk

[1] J. M. Almira and L. Székelyhidi. Local polynomials and the Montel theorem. *Aequationes Math.*, 89, 2015.

[2] Sz. Baják. *Invariance Equations for Two-Variable Means.* Phd thesis, Institute of Mathematics, University of Debrecen, Debrecen, Hungary, 2012.

[3] Sz. Baják and Zs. Páles. Computer aided solution of the invariance equation for two-variable Stolarsky means. *Appl. Math. Comput.*, 216(11):3219–3227, 2010.

[4] Sz. Baják and Zs. Páles. Solving invariance equations involving homogeneous means with the help of computer. *Appl. Math. Comput.*, 219(11):6297–6315, 2013.

[5] C. Bandle, A. Gilányi, L. Losonczi, and M. Plum, editors. *Inequalities and Applications 2010*, volume 161 of *International Series of Numerical Mathematics.* Birkhäuser, 2012.

[6] R. Beneduci and L. Molnár. On the standard K-loop structure of positive invertible elements in a C^*-algebra. *J. Math. Anal. Appl.*, 420(1):551–562, 2014.

[7] M. Bessenyei. Functional equations and finite groups of substitutions. *Amer. Math. Monthly*, 117(10):921–927, 2010.

[8] M. Bessenyei. *Inequalities and Separation Theorems for Generalized Convex Functions.* Hab. thesis, Institute of Mathematics, University of Debrecen, 2011.

[9] M. Bessenyei, G. Horváth, and Cs. G. Kézi. Functional equations on finite groups of substitutions. *Expo. Math.*, 30(3):283–294, 2012.

[10] M. Bessenyei and Cs. G. Kézi. Functional equations and group substitutions. *Linear Algebra Appl.*, 434(6):1525–1531, 2011.

[11] M. Bessenyei and Cs. G. Kézi. Solving functional equations via finite substitutions. *Aequationes Math.*, 85(3):593–600, 2013.

[12] M. Bessenyei and Zs. Páles. Separation by linear interpolation families. *J. Nonlinear Convex Anal.*, 13(1):49–56, 2012.

[13] M. Bessenyei and P. Szokol. Convex separation by regular pairs. *J. Geom.*, 104(1):45–56, 2013.

[14] M. Bessenyei and P. Szokol. Separation by convex interpolation families. *J. Convex Anal.*, 20(4):937–946, 2013.

[15] Z. Boros and W. Fechner. An alternative equation for polynomial functions. *Aequationes Math.*, 89, 2015.

[16] Z. Boros and E. Gselmann. Hyers–Ulam stability of derivations and linear functions. *Aequationes Math.*, 80(1-2):13–25, 2010.

[17] Z. Boros and N. Nagy. Approximately convex functions. *Ann. Univ. Sci. Budapest. Sect. Comput.*, 40:143–150, 2013.

[18] G. Gy. Borus and A. Gilányi. Solving systems of linear functional equations with computer. *in* 4^{th} *IEEE International Conference on Cognitive Infocommunications (CogInfoCom), Budapest, Hungary*, page 559–562, 2013.

[19] F. Botelho, J. Jamison, and L. Molnár. Algebraic reflexivity of isometry groups and automorphism groups of some operator structures. *J. Math. Anal. Appl.*, 408(1):177–195, 2013.

[20] F. Botelho, J. Jamison, and L. Molnár. Surjective isometries on Grassmann spaces. *J. Funct. Anal.*, 265(10):2226–2238, 2013.

[21] J. Brzdęk, J. Chmieliński, K. Ciepliński, R. Ger, Zs. Páles, and M.C. Zdun, editors. *Recent developments in functional equations and inequalities. Based on the 14th international conference on functional equations and inequalities (ICFEI) dedicated to the memory of Marek Kuczma.* Banach Center Publications. Polish Academy of Sciences, Institute of Mathematics, Warsaw, 2013.

[22] J. Brzdęk, J. Chudziak, and Zs. Páles. A fixed point approach to stability of functional equations. *Nonlinear Anal.*, 74(17):6728–6732, 2011.

[23] P. Burai. Matkowski-Sutô type equation on symmetrized weighted quasi-arithmetic means. *Results Math.*, 63(1-2):397–408, 2013.

[24] P. Burai. Monotone operators and local-global minimum property of nonlinear optimization problems. *Ann. Univ. Sci. Budapest. Sect. Comput.*, 40:151–158, 2013.

[25] P. Burai. Necessary and sufficient condition on global optimality without convexity and second order differentiability. *Optim. Lett.*, 7(5):903–911, 2013.

[26] P. Burai. Local-global minimum property in unconstrained minimization problems. *J. Optim. Theory Appl.*, 162(1):34–46, 2014.

[27] P. Burai and J. Dascăl. The equality problem in the class of conjugate means. *Aequationes Math.*, 84(1-2):77–90, 2012.

[28] P. Burai and A. Házy. On approximately h-convex functions. *J. Convex Anal.*, 18(2):447–454, 2011.

[29] P. Burai, A. Házy, and T. Juhász. On approximately Breckner s-convex functions. *Control Cybernet.*, 40(1):91–99, 2011.
[30] P. Burai, A. Házy, and T. Juhász. A composite functional equation from algebraic aspect. *Aequationes Math.*, 86(1-2):57–64, 2013.
[31] P. Burai and J. Jarczyk. Conditional homogeneity and translativity of Makó-Páles means. *Ann. Univ. Sci. Budapest. Sect. Comput.*, 40:159–172, 2013.
[32] Z. Daróczy. On the equality and comparison problem of a class of mean values. *Aequationes Math.*, 81(3):201–208, 2011.
[33] Z. Daróczy. On functional equations involving means. *Publ. Math. Debrecen*, 84(1-2):221–228, 2014.
[34] Z. Daróczy and J. Dascăl. On the equality problem of conjugate means. *Results Math.*, 58(1-2):69–79, 2010.
[35] Z. Daróczy and J Dascăl. A functional equation with a symmetric binary operation. *Aequationes Math.*, 82(3):291–297, 2011.
[36] Z. Daróczy and J. Dascăl. On conjugate means of n variables. *Annales Univ. Sci. Budapest. Sect. Comp.*, 34:87–94, 2011.
[37] Z. Daróczy and Gy. Maksa. A functional equation involving comparable weighted quasi-arithmetic means. *Acta Math. Hungar.*, 138(1-2):147–155, 2013.
[38] Z. Daróczy and Zs. Páles. On an elementary inclusion problem and generalized weighted quasi-arithmetic means. In *Recent developments in functional equations and inequalities*, volume 99 of *Banach Center Publ.*, page 45–54. Polish Acad. Sci. Inst. Math., Warsaw, 2013.
[39] Z. Darózy. Antal Járai has turned 60. *Annales Univ. Sci. Budapest. Sect. Comp.*, 35:11–12, 2011.
[40] J. Dascăl. *Mean values and functional equations.* Phd thesis, University of Luxembourg, Luxembourg, 2012.
[41] J Dascăl and J Jarczyk. Computer assisted solution of an equality problem of mean values. *Appl. Math. Comput.*, 219(2):475–481, 2012.
[42] G. Dolinar and L. Molnár. Sequential endomorphisms of finite-dimensional Hilbert space effect algebras. *J. Phys. A, Math. Theor.*, 45(6):Article ID 065207, 2012.
[43] G. Dolinar and L. Molnár. Automorphisms for the logarithmic product of positive semidefinite operators. *Linear Multilinear Algebra*, 61(2):161–169, 2013.
[44] W. Fechner and E. Gselmann. General and alien solutions of a functional equation and of a functional inequality. *Publ. Math. Debrecen*, 80(1-2):143–154, 2012.
[45] Á. Figula and Á. Száz. Graphical relationships between the infimum and intersection convolutions. *Math. Pannon.*, 21(1):23–35, 2010.
[46] A. Fošner, R. Ger, A. Gilányi, and M. S. Moslehian. On linear functional equations and completeness of normed spaces. *Banach J. Math. Anal.*, 7(1):196–200, 2013.
[47] Gy. P. Gehér and G. Nagy. Maps on classes of Hilbert space operators preserving measure of commutativity. *Linear Algebra Appl.*, 463:205–227, 2014.
[48] A. Gilányi, Cs. G. Kézi, and K. Troczka-Pawelec. On two different concepts of subquadraticity. In C. Bandle, A. Gilányi, L. Losonczi, and M. Plum, editors, *Inequalities and Applications 2010*, volume 161 of *International Series of Numerical Mathematics*, page 209–215. Birkhäuser, 2012.
[49] A. Gilányi, N. Merentes, K. Nikodem, and Zs. Páles. Characterizations and decomposition of strongly Wright-convex functions of higher order. *Opusc. Math.*, 35(1):37–46, 2015.
[50] A. Gilányi, K. Nagatou, and P. Volkmann. Stability of a functional equation coming from the characterization of the absolute value of additive functions. *Ann. Funct. Anal.*, 1(2):1–6, 2010.
[51] A. Gilányi and K. Troczka-Pawelec. Regularity of weakly subquadratic functions. *J. Math. Anal. Appl.*, 382:814–821, 2011.
[52] T. Glavosits and Cs. G. Kézi. On the domain of oddness of an infimal convolution. *Math. Notes, Miskolc*, 12(1):31–40, 2011.
[53] T. Glavosits and Á. Száz. The infimal convolution can be used to easily prove the classical Hahn-Banach theorem. *Rostocker Math. Kolloq.*, 65:71–83, 2010.
[54] T. Glavosits and Á. Száz. A Hahn-Banach type generalization of the Hyers-Ulam theorem. *An. Şt. Univ. Ovidius Constanţa, Seria Mat.*, 19(1):139–144, 2011.
[55] T. Glavosits and Á Száz. The generalized infimal convolution can be used to naturally prove some dominated monotone additive extension theorems. *Ann. Math. Sil.*, (25):67–100 (2012), 2011.
[56] T. Glavosits and Á. Száz. Divisible and cancellable subsets of groupoids. *Ann. Math. Inform.*, 43:53–77, 2014.
[57] T. Glavosits and Á. Száz. Constructions and extensions of free and controlled additive relations, *Handbook of Functional Equations*, volume 95 of *Springer Optimization and Its Applications*, pp. 161–208. Springer Verlag, 2014.

[58] C. González, K. Nikodem, Zs. Páles, and G. Roa. Bernstein-Doetsch type theorems for set-valued maps of strongly and approximately convex and concave type. *Publ. Math. Debrecen*, 84(1-2):229–252, 2014.

[59] E. Gselmann. On the stability of the modified entropy equation. *Results Math.*, 58:255–268, 2010.

[60] E. Gselmann. Stability of the entropy equation. *Publ. Math. Debrecen*, 77:201–210, 2010.

[61] E. Gselmann. *Az információelmélet néhány függvényegyenletének stabilitása (Stability of Some Functional Equations Stemming from the Theory of Information), (in Hungarian).* Phd thesis, Institute of Mathematics, University of Debrecen, Debrecen, Hungary, 2011.

[62] E. Gselmann. Entropy functions and functional equations. *Math. Commun.*, 16(2):347–357, 2011.

[63] E. Gselmann. Notes on the characterization of derivations. *Acta Sci. Math. (Szeged)*, 78(1–2):137–145, 2012.

[64] E. Gselmann. Derivations and linear functions along rational functions. *Monatsh. Math.*, 169(3-4):355–370, 2013.

[65] E. Gselmann. On some classes of partial difference equations. *Ann. Univ. Sci. Budapest. Sect. Comput.*, 40:285–294, 2013.

[66] E. Gselmann. *Stability and information functions. Stability of some functional equations stemming from the theory of information.* Scholars' Press, Saarbrücken, 2013.

[67] E. Gselmann. Approximate derivations of order n. *Acta Math. Hungar.*, 144(1):217–226, 2014.

[68] E. Gselmann. Stability properties in some classes of second order partial differential equations. *Results Math.*, 65(1-2):95–103, 2014.

[69] E. Gselmann. Jordan triple mappings on positive definite matrices. *Aequationes Math.*, 89, 2015.

[70] E. Gselmann. On a discrete version of the wave equation. *Aequationes Math.*, 89, 2015.

[71] E. Gselmann and Gy. Maksa. A characterization of the relative entropies. *Annales Univ. Sci. Budapest. Sect. Comp.*, 35:151–162, 2011.

[72] E. Gselmann and Gy. Maksa. *Handbook in Functional Equations: Stability Theory*, volume 96 of *Springer Optimization and Its Applications*, chapter Some functional equations related to the characterizations of information measures and their stability, page 199–243. Springer Verlag, 2014.

[73] E. Gselmann and Á. Száz. An instructive treatment of a generalization of Găvruţă's stability theorem. *Sarajevo J. Math.*, 6 (18):1–19, 2010.

[74] C. Hannusch and P. Lakatos. Construction of self-dual radical 2-codes of given distance. *Discrete Math. Algorithm. Appl.*, 4(4):Art. no. 1250052, 13 pp., 2012.

[75] O. Hatori, G. Hirasawa, T. Miura, and L. Molnár. Isometries and maps compatible with inverted Jordan triple products on groups. *Tokyo J. Math.*, 35(2):385–410, 2012.

[76] O. Hatori and L. Molnár. Isometries of the unitary group. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 140(6):2127–2140, 2012.

[77] O. Hatori and L. Molnár. Isometries of the unitary groups and Thompson isometries of the spaces of invertible positive elements in C^*-algebras. *J. Math. Anal. Appl.*, 409(1):158–167, 2014.

[78] G. Horváth, L. Székelyhidi, and B. Wilkens. Non-synthesizable varieties. *J. Math. Anal. Appl.*, 417(1):394–399, 2014.

[79] A. Házy. Bernstein-Doetsch type results for h-convex functions. *Math. Inequal. Appl.*, 14(3):499–508, 2011.

[80] A. Házy. Bernstein-Doetsch type results for (k, h)-convex functions. *Miskolc Math. Notes*, 13(2):325–336, 2012.

[81] W. Jarczyk and Zs. Páles. Convexity and a Stone-type theorem for convex sets in abelian semigroup setting. *Semigroup Forum*, 90(1):207–219, 2015.

[82] A. Járai. On the measurable solution of a functional equation. *Aequationes Math.*, 80(1-2):131–139, 2010.

[83] A. Járai. Regularity of functional equations with few variables. *Ann. Univ. Sci. Budapest. Sect. Comput.*, 40:337–351, 2013.

[84] A. Járai, K. Lajkó, and F. Mészáros. On measurable functions satisfying multiplicative type functional equations almost everywhere. In C. Bandle, A. Gilányi, L. Losonczi, and M. Plum, editors, *Inequalities and Applications 2010*, volume 161 of *International Series of Numerical Mathematics*, page 241–253. Birkhäuser, 2012.

[85] I. Kocsis. On the linear dependence of a finite set of additive functions. *Result. Math.*, 62(1-2):67–71, 2012.

[86] K. Lajkó, Gy. Maksa, and Zs. Páles. Report of Meeting: Researches in Didactics of Mathematics and Computer Sciences (January 21 – 23, 2010, Debrecen, Hungary). *Teaching Math. Comp. Sci.*, 8(1):177–195, 2010.

[87] K. Lajkó and F. Mészáros. *Functional Equations and Characterization Problems.* VDM Verlag Dr. Müller, Saarbrücken, 2011.

[88] K. Lajkó and F. Mészáros. Multiplicative type functional equations arising from characterization problems. *Aequationes Math.*, 83(3):199–208, 2012.

[89] K. Lajkó and F. Mészáros. General solution of a functional equation arisen from characterization problems. *Ann. Univ. Sci. Budapest. Sect. Comput.*, 39:291–302, 2013.

[90] K. Lajkó and F. Mészáros. Special cases of the generalized Hosszú equation on interval. *Aequationes Math.*, 89, 2015.
[91] K. Lajkó, F. Mészáros, and Gy. Pap. Characterization of bivariate distributions with conditionals of the same type. *Ann. Univ. Sci. Budapest. Sect. Comput.*, 41:73–84, 2013.
[92] L. Losonczi. Production functions having the CES property. *Acta Math. Acad. Paedagog. Nyházi. (N.S.)*, 26(1):113–125, 2010.
[93] L. Losonczi. On homogenous Páles means. *Ann. Univ. Sci. Budapest. Sect. Comput.*, 41:103–117, 2013.
[94] L. Losonczi and Zs. Páles. Equality of two-variable functional means generated by different measures. *Aequationes Math.*, 81(1-2):31–53, 2011.
[95] L. Losonczi and Zs. Páles. Minkowski-type inequalities for means generated by two functions and a measure. *Publ. Math. Debrecen*, 78(3-4):743–753, 2011.
[96] R. L. Lovas and J. Szilasi. Homotheties of Finsler manifolds. *SUT J. Math.*, 46(1):23–34, 2010.
[97] Gy. Maksa. On additive functions which differentiate elementary functions in some sense. *Ann. Univ. Sci. Budapest. Sect. Comput.*, 41:125–136, 2013.
[98] Gy. Maksa. On subgroups of the multiplicative group of the positive real numbers associated to information functions. *Publ. Math. Debrecen*, 84(1-2):253–258, 2014.
[99] Gy. Maksa and Zs. Páles. The equality case in some recent convexity inequalities. *Opuscula Math.*, 31(2):269–277, 2011.
[100] Gy. Maksa and Zs. Páles. Wigner's theorem revisited. *Publ. Math. Debrecen*, 81(1-2):243–249, 2012.
[101] Gy. Maksa and Zs. Páles. Convexity with respect to families of means. *Aequationes Math.*, 89, 2015.
[102] Gy. Maksa and A. Varga. The equivalence of two functional equations involving the arithmetic mean, the geometric mean and their Gauss composition. *Aequationes Math.*, 80:173–179, 2010.
[103] J. Makó. *On Approximately Convex Functions.* Phd thesis, Institute of Mathematics, University of Debrecen, Debrecen, 2013.
[104] J. Makó, K. Nikodem, and Zs. Páles. On strong $(\alpha, \mathbb{F})$-convexity. *Math. Inequal. Appl.*, 15(2):289–299, 2012.
[105] J. Makó and Zs. Páles. Approximate convexity of Takagi type functions. *J. Math. Anal. Appl.*, 369(2):545–554, 2010.
[106] J. Makó and Zs. Páles. Strengthening of strong and approximate convexity. *Acta Math. Hungar.*, 132(1-2):78–91, 2011.
[107] J. Makó and Zs. Páles. Implications between approximate convexity properties and approximate Hermite-Hadamard inequalities. *Cent. Eur. J. Math.*, 10(3):1017–1041, 2012.
[108] J. Makó and Zs. Páles. Korovkin type theorems and approximate Hermite-Hadamard inequalities. *J. Approx. Theory*, 164(8):1111–1142, 2012.
[109] J. Makó and Zs. Páles. On φ-convexity. *Publ. Math. Debrecen*, 80(1-2):107–126, 2012.
[110] J. Makó and Zs. Páles. Approximate Hermite-Hadamard type inequalities for approximately convex functions. *Math. Inequal. Appl.*, 16(2):507–526, 2013.
[111] J. Makó and Zs. Páles. On approximately convex Takagi type functions. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 141(6):2069–2080, 2013.
[112] L. Molnár. Continuous maps on matrices transforming geometric mean to arithmetic mean. *Annales Univ. Sci. Budapest. Sect. Comp.*, 35:217–222, 2011.
[113] L. Molnár. Kolmogorov-Smirnov isometries and affine automorphisms of spaces of distribution functions. *Cent. Eur. J. Math.*, 9(4):789–796, 2011.
[114] L. Molnár. Lévy isometries of the space of probability distribution functions. *J. Math. Anal. Appl.*, 380:847–852, 2011.
[115] L. Molnár. Maps preserving general means of positive operators. *Electron. J. Linear Algebra*, 22:864–874, 2011.
[116] L. Molnár. Order automorphisms on positive definite operators and a few applications. *Linear Algebra Appl.*, 434(10):2158–2169, 2011.
[117] L. Molnár. Jordan triple endomorphisms and isometries of unitary groups. *Linear Algebra Appl.*, 439(11):3518–3531, 2013.
[118] L. Molnár. A few conditions for a C^*-algebra to be commutative. *Abstr. Appl. Anal.*, pages Art. ID 705836, 4, 2014.
[119] L. Molnár. Bilocal $*$-automorphisms of $B(H)$. *Arch. Math. (Basel)*, 102(1):83–89, 2014.
[120] L. Molnár. Jordan triple endomorphisms and isometries of spaces of positive definite matrices. *Linear Multilinear Algebra*, 63(1):12–33, 2015.
[121] L. Molnár and G. Nagy. Isometries and relative entropy preserving maps on density operators. *Linear Multilinear Algebra*, 60(1):93–108, 2012.

[122] L. Molnár and G. Nagy. Transformations on density operators that leave the Holevo bound invariant. *Internat. J. Theoret. Phys.*, 53(10):3273–3278, 2014.

[123] L. Molnár, G. Nagy, and P. Szokol. Maps on density operators preserving quantum f-divergences. *Quantum Inf. Process.*, 12(7):2309–2323, 2013.

[124] L. Molnár and P. Szokol. Kolmogorov-Smirnov isometries of the space of generalized distribution functions. *Math. Slovaca*, 64(2):433–444, 2014.

[125] L. Molnár and P. Szokol. Transformations on positive definite matrices preserving generalized distance measures. *Linear Algebra Appl.*, 466:141–159, 2015.

[126] L. Molnár and W. Timmermann. Transformations on bounded observables preserving measure of compatibility. *Int. J. Theor. Phys.*, 50(12):3857–3863, 2011.

[127] L. Molnár and P. Šemrl. Transformations of the unitary group on a Hilbert space. *J. Math. Anal. Appl.*, 388(2):1205–1217, 2012.

[128] F. Mészáros. *Függvényegyenletek és karakterizációs problémák.* Phd thesis, Institute of Mathematics, University of Debrecen, Debrecen, 2010.

[129] G. Nagy. Isometries on positive operators of unit norm. *Publ. Math. Debrecen*, 82(1):183–192, 2013.

[130] G. Nagy. Preservers for the p-norm of linear combinations of positive operators. *Abstr. Appl. Anal.*, pages Art. ID 434121, 9, 2014.

[131] K. Nikodem and Zs. Páles. Characterizations of inner product spaces by strongly convex functions. *Banach J. Math. Anal.*, 5(1):83–87, 2011.

[132] Zs. Páles. On the equality of quasi-arithmetic and Lagrangian means. *J. Math. Anal. Appl.*, 382(1):86–96, 2011.

[133] Zs. Páles. On Wright- but not Jensen-convex functions of higher order. *Ann. Univ. Sci. Budapest. Sect. Comput.*, 41:227–234, 2013.

[134] Zs. Páles and I.-R. Petre. Iterative fixed point theorems in E-metric spaces. *Acta Math. Hungar.*, 140(1-2):134–144, 2013.

[135] Zs. Páles and L. Székelyhidi. Laudation to Zoltán Daróczy. *Ann. Univ. Sci. Budapest. Sect. Comput.*, 40:9–20, 2013.

[136] Zs. Páles and V. Zeidan. Co-Jacobian for Lipschitzian maps. *Set-Valued Var. Anal.*, 18(1):57–78, 2010.

[137] Zs. Páles and V. Zeidan. V-Jacobian and V-co-Jacobian for Lipschitzian maps. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 29(2):623–646, 2011.

[138] J. Szilasi, R. L. Lovas, and D. Cs. Kertész. Several ways to a Berwald manifold – and some steps beyond. *Extr. Math.*, 26:89–130, 2011.

[139] J. Szilasi, R.L. Lovas, and Cs.D. Kertész. *Connections, Sprays and Finsler Structures.* World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore, 2014.

[140] J. Szilasi and L. Tamássy. Generalized Berwald spaces as affine deformations of Minkowski spaces. *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.*, 57(2):165–178, 2012.

[141] J. Szilasi and A. Tóth. Conformal vector fields on Finsler manifolds. *Commun. Math.*, 19:149–168, 2011.

[142] J. Szilasi and A. Tóth. Curvature collineations in spray manifolds. *Balkan J. Geom. Appl.*, 17:90–102, 2012.

[143] Á. Száz. Altman type generalizations of ordering and maximality principles of Brézis, Browder and Brøndsted. *Adv. Stud. Contemp. Math. (Kyungshang)*, 20(4):595–620, 2010.

[144] Á. Száz. Foundations of the theory of vector relators. *Adv. Stud. Contemp. Math. (Kyungshang)*, 20(1):139–195, 2010.

[145] Á. Száz. The infimal convolution can be used to derive extension theorems from the sandwich ones. *Acta Sci. Math. (Szeged)*, 76(3-4):489–499, 2010.

[146] Á. Száz. The intersection convolution of relations. *Creat. Math. Inform.*, 19(2):209—–217, 2010.

[147] Á. Száz. Set theoretic operations on box and totalization relations. *Int. J. Math. Sci. Appl.*, 1:19–41, 2011.

[148] Á. Száz. Sets and posets with inversions. *Publ. Inst. Math. (Beograd) (N. S.)*, 90:111–123, 2011.

[149] Á. Száz. A common generalization of the postman, radial, and river metrics. *Rostock. Math. Kolloq.*, 67:89–125, 2012.

[150] Á. Száz. Galois-type connections and continuities of pairs of relations. *J. Int. Math. Virt. Inst.*, 2:39–66, 2012.

[151] Á. Száz. The Hyers–Ulam and Hahn–Banach theorems and some elementary operations on relations motivated by their set-valued generalizations. In *Nonlinear analysis*, volume 68 of *Springer Optim. Appl.*, page 631–705. Springer, New York, 2012.

[152] Á. Száz. An easy to remember, economic approach to the Riccati differential equation. *Math. Student*, 82(1-4):165–176, 2013.

[153] Á. Száz. An extension of an additive selection theorem of Z. Gajda and R. Ger. *Sci. Ser. A. Math. Sci. (N.S.)*, 24:33–54, 2013.

[154] Á. Száz. An instructive treatment and some natural extensions of a set-valued function of Páles. *Math. Pannon.*, 24(1):77–108, 2013.
[155] Á. Száz. Inclusions for compositions and box products of relations. *J. Int. Math. Virtual Inst.*, 3:97–125, 2013.
[156] Á. Száz. Lower semicontinuity properties of relations in relator spaces. *Adv. Stud. Contemp. Math. (Kyungshang)*, 23(1):107–158, 2013.
[157] Á. Száz. A particular Galois connection between relations and set functions. *Acta Univ. Sapientiae Math.*, 6:73–91, 2014.
[158] Á. Száz. A relational reformulation of the Phelps–Cardwell lemma. *Malaya J. Math.*, 2:254–264, 2014.
[159] Á. Száz. Generalizations of Galois and Pataki connections to relator spaces. *J. Int. Math. Virt. Inst.*, 4:43–75, 2014.
[160] L. Székelyhidi. Fourier transform for mean periodic functions. *Annales Univ. Sci. Budapest. Sect. Comp.*, 35:267–283, 2011.
[161] L. Székelyhidi. Noetherian rings of polynomial functions on Abelian groups. *Aequationes Math.*, 84(1-2):41–50, 2012.
[162] L. Székelyhidi. Polynomial functions and spectral synthesis on Abelian groups. *Banach J. Math. Anal.*, 6(1):124–131, 2012.
[163] L. Székelyhidi. Spectral analysis and spectral synthesis. In *Nonlinear analysis*, volume 68 of *Springer Optim. Appl.*, page 707–719. Springer, New York, 2012.
[164] L. Székelyhidi. A characterization of exponential polynomials. *Publ. Math. Debrecen*, 83(4):757–771, 2013.
[165] L. Székelyhidi. Exponential polynomials on commutative hypergroups. *Arch. Math. (Basel)*, 101(4):341–347, 2013.
[166] L. Székelyhidi. *Functional equations on hypergroups.* World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2013.
[167] L. Székelyhidi. Spectral synthesis problems on hypergroups. *Ann. Univ. Sci. Budapest. Sect. Comput.*, 39:439–447, 2013.
[168] L. Székelyhidi. The Levi-Civita equation, vector modules and spectral synthesis. In *Recent developments in functional equations and inequalities*, volume 99 of *Banach Center Publ.*, page 193–206. Polish Acad. Sci. Inst. Math., Warsaw, 2013.
[169] L. Székelyhidi. Annihilator methods in discrete spectral synthesis. *Acta Math. Hungar.*, 143(2):351–366, 2014.
[170] L. Székelyhidi. Characterization of exponential polynomials on commutative hypergroups. *Ann. Funct. Anal.*, 5(2):53–60, 2014.
[171] L. Székelyhidi. *Harmonic and spectral analysis.* World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2014.
[172] L. Székelyhidi. On Fréchet's functional equation. *Monatsh. Math.*, 175(4):639–643, 2014.
[173] L. Székelyhidi. A functional equation for exponential polynomials. *Aequationes Math.*, 89, 2015.
[174] L. Székelyhidi and L. Vajday. Spectral analysis on commutative hypergroups. *Aequationes Math.*, 80:223–226, 2010.
[175] L. Székelyhidi and L. Vajday. A moment problem on some types of hypergroups. *Ann. Funct. Anal.*, 3(2):58–65, 2012.
[176] L. Székelyhidi and L. Vajday. Functional equations on the SU(2)-hypergroup. *Math. Pannon.*, 23(2):187–193, 2012.
[177] L. Székelyhidi and L. Vajday. Spectral analysis and moment functions. *Jour. Inf. Math. Sci.*, 4(2):185–188, 2012.
[178] L. Székelyhidi and L. Vajday. On conditional functional equations with applications on hypergroups. *Ann. Univ. Sci. Budapest. Sect. Comput.*, 41:323–332, 2013.