Szakmai beszámoló a K81188 számú "Algebrai logika, relativitáselmélet logikai struktúrájának vizsgálata" című OTKA zárójelentéséhez

Ez a projekt a korábbi, hasonló témájú OTKA projektek folytatása. Ezek témája a relativitáselmélet kutatása matematikai logikai eszközökkel, és ezzel párhuzamosan az alkalmazott logikai eszközök továbbfejlesztése. A jelen projekt során, az előző projektek eredményeinek köszönhetően, többek között a matematikai logika definiálhatóság-elméletének – aminek az algebrai logika egyik ága – konkrétabb alkalmazását tűztük ki célul. Úgy érezzük ezt sikerült elérni, továbbá ezen alkalmazások a definiálhatóságelmélet gazdagodásához is vezettek.

(I) EREDMÉNYEK

1. A speciális relativitáselmélet vizsgálata elmélet-hálózat alakjában

Célunk a relativitáselmélet (speciális, általános, kozmológiai) elsőrendű logikában felírt elméletek rendszereként való vizsgálata. Ezen elméletek közös tulajdonsága, hogy mind a relativitáselméletről szól, különböző részletességgel, különböző aspektusból nézve, különböző részeiről és különböző formalizmust használva. Hálózattá a köztük lévő kapcsolatok teszik őket, ezek a kapcsolatok pedig az elméletek közt ható matematikai logikai értelemben vett interpretációk. A relativitáselmélet ilyen szellemű vizsgálata azt is jelenti, hogy nem egy végső és monolitikus elméletet keresünk, hanem különböző alapfogalmakat és alapfeltevéseket tartalmazó elméletek rugalmas, állandóan bővülő rendszerében dolgozunk, ahol figyelemmel kísérjük az elméletek egymásba való interpretálhatóságát. Ez a közelítésmód összhangban van azzal a fizikában sokszor hangsúlyozott elvvel, hogy egy konkrét fizikai probléma megoldásakor sosem lehet csak egy elméletet alkalmazni, hanem mindig az összes releváns elméletet figyelembe kell venni.

Elmélletháló keletkezik egy elmélet axiomatikus struktúrájának vizsgálatakor, amikor olyan tipusú kérdéseket vizsgálunk, hogy az elmélet mely axiómáiból következnek bizonyos predikciók és melyekből nem, az elmélet egyes axiómáit mely más szellemű axiómákkal lehet helyettesíteni, stb. Az ilyen típusú vizsgálatok hozzátartoznak egy axiomatius elmélet szokásos vizsgálatához, a matematikai gyakorlatban ez egy elterjedten használt módszer. A speciális relativitáselméletre felírt SpecRel axiómarendszerünket alapos vizsgálat alá vetettük ebből a szempontból. Bizonyítottuk például, hogy az elmélet 5 axiómájából következnek a jólismert predikciók a mozgó órák lelassulásáról, a mozgó méterrudak megrövidüléséről, az órák szinkronból való kiállásáról. Bizonyítottuk, hogy következik a fénynél gyorsabb megfigyelők lehetetlensége, de nem következik a fénynél gyorsabb jelek létezésének lehetetlensége. Beemeltük a képbe a gyorsuló megfigyelőket az AccRel nevű elméletünkben, és felírtuk az általános relativitáselmélet GenRel nevű axiómarendszerét, amely azt fejezi ki, hogy minden megfigyelő lokálisan speciális relativitáselméletet tapasztal. Ezekben a vizsgálatokban nem változtatjuk az axiómák felírására használt elsőrendű nyelvet, más szóval nem lépünk ki a megadott fogalmi keretből.

A jelen projektben a relativitáselmélet új típusú vizsgálatába kezdtünk: a különböző nyelven felírt elméletek közti kapcsolatokra koncentráltunk. Ez azt is jelenti, hogy azok a kérdések kerültek előtérbe, hogy milyen fogalmakat használunk, milyeneket lehet kifejezni az elméletben, milyeneket nem, hogyan történik teljesen új fogalmak felfedezése, beemelésük a nyelvbe. Tehát az állítások szerkezete után a fogalmak szerkezetét kezdtük el vizsgálni. Az ilyen tipusú vizsgálatok nem annyira elterjedtek az irodalomban, az algebrai logika és a matematikai logika definiálhatóság-elméletének erőteljes használatát igénylik. Valóban, jelen projektben az e téren a végzett kutatásaink hatására kiderült, hogy ezen eszközök fejlesztése szükséges ahhoz, hogy jobban használhatók legyenek az ilyen jellegű kutatásokhoz. Továbbá, ezen új tipusú vizsgálatok izgalmas felfedezéseket hoztak, más megvilágításba helyezik a kutatandó területet, jelen esetben a relativitáselméletet.

Az új módszer lényege a következő. Egy konkrét axiómarendszer felírásánál rögzítjük a logikai nyelvet, más szóval rögzítjük, hogy mely fogalmakat tekintjük alapfogalmaknak, olyanoknak amik adottak a számunkra, amiket nem analizálunk tovább az elméletben. Különböző elméletek különböző alapfogalmakat használnak. Például, a mi SpecRel axiómarendszerünkben alapfogalom a koordinátarendszer (megfigyelőnek nevezzük), alapfogalom a mennyiség és struktúrája. Nem vizsgáljuk, hogy hogyan keletkeznek. Más elméletekben alapfogalom például az esemény és az események között ható relativisztikus távolság (az ún. Minkowski-metrika). A döntés, hogy mely fogalmakat tekintjük alapfogalmaknak az elméletben, azonban nem egyszer s mindenkorra szól. Ha ezeket az alapfogalmakat tovább akarjuk analizálni, részeikre bontani, más fogalmakból felépíteni, azt vizsgálni, hogy hogyan keletkeznek, akkor egy ún. interpretációt építünk két különböző nyelvű elmélet között. Egy adott nyelven az alapfogalmak segítségével kifejezhetők összetett fogalmak (ezek a szabad változókat tartalmazó ún. nyitott formuláknak felelnek meg). Két különböző alapfogalmakat használó elmélet közötti interpretáció az egyik nyelv alapfogalmait a másik nyelv összetett fogalmainak megfeleltető olyan struktúratartó fordítófüggvény, mely a két elmélet állításait is „tiszteletben tartja". A jelen projekt keretében kiválasztottunk két, erősen eltérő szellemű és tartalmúnak látszó elméletet, SpecRel-t és SigTh-t, és a kettő összehasonlító logikai vizsgálata meglepő eredményekkel szolgált.

Bizonyítottuk, hogy SpecRel interpretálható SigTh-ba; meg is adtuk ezt az interpretációt [8]. Itt SpecRel a mi általunk felírt áttekinthető, áramvonalas 5 axiómából álló axiómarendszere a speciális relativitáselméletnek, amelynek alapfogalmai: a "megfigyelő" (koordinátarendszer), "mennyiségek struktúrája", "foton", "próbatest". A másik elméletet James Ax közölte a Foundations of Physics folyóiratban 1978-ban [12], fotonokat kibocsátó és elnyelő részecskékről. A SigTh elméletnek csak a "jel", "jel-kibocsátás", "jel-észlelés" az alapfogalmai, nincsen "idő", "hely", "mennyiség", "esemény", "jel életút", "inerciális életút" (mely fogalmak könnyedén értelmezhetők a mi SpecRel-ünkben). Az, hogy megadtunk egy interpretációt SpecRel-ből SigTh-ba, azt is jelenti, hogy felírtunk egy-egy definíciót a mennyiségekre és struktúrájukra csak fényjelek kibocsátása és észlelése segítségével, a koordinátarendszerek felállítására adtunk algoritmust, és értelmeztük az "idő" és "hely" stb. fogalmakat SigTh spártai egyszerűségű alapfogalmaival. Mindezeknek több következménye van, hármat felsorolunk.

– Adtunk a speciális relativitáselméletnek egy ún. operacionista szemantikát. A tudománymetodológiában van egy olyan szemlélet, hogy a fizikai elméletek különböznek abban a matematikai elméletektől, hogy egy fizikai elméletnél minden egyes alapfogalmat kötni kell a fizikai valósághoz. Például minden egyes alapfogalmat egy ún. mérési eljárással lehet definiálni (ezt hívják operacionista szemantikának). Esetünkben a mérési eljárás eszközei fényjelek kibocsátása és észlelése, és ezek segítségével definiáltuk az idő, hely stb (relativisztikus) fogalmait. Ezzel a téridő fogalmainak egy jobb megértését is nyertük.

— Megmutattuk, hogy milyen értelemben axiómarendszere SigTh a speciális relativitáselméletnek. James Ax úgy közölte ezt az axiómarendszert, mint a speciális relativitáselmélet egy lehetséges axiómarendszerét. Azonban eredetileg egyáltalán nem volt világos, hogy mi köze van SigTh-nak az Einstein-féle speciális relativitáselmélethez, annyira kevés dolog látszik kifejezhetőnek benne. Megmutattuk, hogy ha SpecRel-hez hozzáadunk pár egyszerűsítő, lényegtelen axiómát (pl. hogy minden foton-életúton csak egy foton "utazik") és ugyanakkor a SigTh-ban kijelölünk egy "méterrudat" (pl. az egymástól egységnyi távolságra levő eseménypárok halmaza alakjában), akkor az így kapott két elmélet definíciósan ekvivalens. Ez azt jelenti, hogy ugyanazok a fogalmak definiálhatók a két elméletben, sőt ezek struktúrája, azaz a két elmélet fogalom-algebrája izomorf egymással. (Ezek a fogalom-algebrák az algebrai logikából jólismert cilindrikus algebrák.) Az izomorfizmus pedig ad egy kétiranyú fordítást a két elmélet nyelve, állításai és fogalmai között. Azaz, a két elmélet, SpecRel és SigTh előbb említett verziói, ugyanazt fejezik ki, csak különböző nyelven– ugyanaz a tartalmuk, de más a "csomagolásuk". E közelítésmód kiterjeszthető általános relativitáselméletre is, pl. a fekete lyukak Schwarzshild féle téridejére. Az ezirányú kutatást már elkezdtük és jól haladunk vele.

– Az az algoritmus, amit a koordinátarendszer fényjelek segítségével való felállítására megadtunk, értelmezhető/kivitelezhető egy fénynél gyorsabb részecske számára is. Így kapunk fénynél gyorsabb "megfigyelőket". Ezek azonban szükségképpen megkülönböztethetők a fénynél lassabb megfigyelőktől. Például, míg egy fénynél lassabb megfigyelő koordináta-tere 3-dimenziós Euklideszi tér, egy fénynél gyorsabb "megfigyelő" így kapott koordinátatere 3-dimenziós Minkowski tér. Minden így kapott fénynél gyorsabb "megfigyelő" egyforma (automorfizmus viszi át egyiket a másikba). Tehát egy megfigyelő rá tud jönni, hogy fénynél lassabban vagy fénynél gyorsabban mozog, de annak a kérdésnek már nincs értelme, hogy mennyivel lassabban vagy gyorsabban [8, 4]. Mindezek a fénynél gyorsabb mozgást új megvilágításba helyezik, ld. az alábbi 2.2 pontot.

Ahhoz, hogy megadjunk egy interpretációt SpecRel és SigTh között, fejleszteni kellett a definiálhatóság-elméleti eszközöket. Nevezetesen, új tipusú jelenséget kell kezelnünk: nemcsak tulajdonságokat hanem új entitások halmazait is kellett definiálnunk. Ez azért van így, mert pl. a SigTh elméletben nem léteznek mennyiség tipusú entitások, a SpecRel nevű elméletben viszont igen, tehát amikor SpecRel -t SigTh-ba interpretáljuk, akkor definiálni kell SigTh eszközeivel a SpecRel -ben alapfogalomként jelenlevő mennyiség entitásokat. Speciálisan az ilyen tipusú feladatokra alkalmas eszközöket fejlesztettünk ki. Ennek vizsgálata információt szolgáltat arról is, hogy bizonyos elvont fogalmak, mint pl. a számok milyen értelemben léteznek, tehát ontológiai vonatkozása is van a módszerünknek. Ebben az irányban tervezzük továbbfejleszteni az eszközeinket, hogy minél kényelmesebben és intuítivabban lehessen használni őket.

Egy adott elmélet több kisebb, jól kezelhető elmélet rendszereként való felírása mindenütt előfordul a tudományban, pl. a gépi tételbizonyításnál is fontos. A csoportunk által művelt axiomatikus közelítés különösen alkalmasnak látszik tételbizonyítók alkalmazására. Valóban, több ilyen munka is született. A [19] cikkben közöltük tapasztalatainkat az ISABELLE nevű tételbizonyító program arra való használatáról, hogy SpecRel-ből bizonyítsuk azt, hogy fénynél gyorsabb megfigyelő nem létezhet (a SpecRel axiómarendszer keretei között). Hasonló szellemben alkalmaztak tételbizonyító programokat a mi általunk felírt SpecRel elméletre más kutatók is, pl. [13].

2. Idő, fény mint határsebesség, és dinamika

2.1. Idő algebrai struktúrája

A relativitáselméleti felfogásban az idő fogalma összefügg az ún. koordinátaidő fogalmával. Az előző pontban leírt vizsgálatokból is kiderül, hogy ez pedig szorosan összefügg azzal, hogy milyen struktúrát használunk a mennyiségek megjelenítésére. Milyen mennyiségfogalmat érdemes illetve kell használnunk? A legáltalánosabban használt mennyiségfogalom a fizikában a valós számoké. De nem ez az egyetlen, pl. használják az imaginárius számokat az idő leírására (Hawking), beszélnek többdimenziós időről, időhurkokról. Axiomatikus közelítésmódunk alkalmas e kérdések érdemi vizsgálatára, ebben az irányban a következő eredményeket kaptuk.

— A speciális relativitáselmélet axiómarendszereiben használatos számtestekről gyakran kikötik, hogy minden pozitív mennyiségnek van gyöke, többek között azért, mert a Minkowski metrika képletében szerepel a gyökjel. A racionális számtest felett megadtuk a speciális relativitáselmélet egy olyan modelljét, amelyben tetszőleges irányban, tetszőleges fénynél kisebb sebességhez tetszőlegesen közeli sebességgel mozoghat inerciális megfigyelő (minden 2-nél nagyobb dimenzió esetén). Ez az eredmény azért meglepő, mert nem lehet olyan modellt adni a racionális számtest felett kettőnél nagyobb dimenzió esetén, ahol bármely fénynél kisebb sebességgel mozoghat megfigyelő [15].

Mint említettük, a téridő geometriája és a mennyiségek algebrai struktúrája összefügg. Például, ha 2-nek nincs négyzetgyöke a mennyiségek testében, akkor a tér 000 pontjából nem lehet fényjelet küldeni a tér 110 pontjába, de fénynél lassabb próbatestet lehet (mert a 0000, 1000, 1100 pontokat összekötő síkban nincsen 1 dőlésszögű egyenes, de vannak 1-nél kisebb dőlésszögű egyenesek). Kérdés, hogy megfigyelő tud-e mozogni a 000 pontból az 110 pontba (azaz tudunk-e koordinátarendszert tenni ezekre a probatestekre úgy, hogy a kapott megfigyelő-együttesben a relativitás elve igaz legyen, tehát hogy a megfigyelők egymástól megkülönböztethetetlenek legyenek).

— Bizonyítottuk, hogy 4 dimenzió esetén nemcsak olyan testek felett lehet a speciális relativitáselméletet kielégítő gazdag modellt megadni, amelyben minden pozitív számnak van gyöke. Egy modellt gazdagnak nevezünk, ha minden megfigyelő világképében, minden 1-nél kisebb dőlésszögű téridő-egyenesen van megfigyelő. Tehát, amelyik 3-dimenziós tér-egyenesen (egy fénynél kisebb sebességű) próbatest tud mozogni, azon megfigyelő is tud. Ez egy 2002-ben publikált probléma megoldása és meglepő a válasz, mert azt mutatja, hogy a téridő elméletben ez a lényeges kérdés más válasszal bír három illetve négy dimenzió esetén. Továbbra is nyitott probléma, hogy 5 dimenzióban lehetséges-e. Ha igen, akkor minden dimenzióban lehetséges, ha nem, akkor páros dimenzióban lehetséges és valószínűleg semelyik páratlanban nem.

— A gyorsuló megfigyelők AccRel elmélete csak valósan zárt testeket enged meg a számok lehetséges struktúráinak, viszont minden valósan zárt test felett van modellje. Bizonyítottuk, hogy az állandó gyorsulású megfigyelők speciális relativitáselméletben való axiómatikus vizsgálatának nincsen modellje az algebrai valós számok teste felett. Nevezetesen, ehhez a természetes logaritmus alapszáma, az e szükséges: egy relativitáselméleti modellben állandó gyorsulású megfigyelő csak akkor létezhet, ha a mennyiségek struktúrája tartalmazza az e számot. Ez az eredmény azt jelenti, hogy míg általában a gyorsuló megfigyelők elméletéhez elegendő a valós számok elsőrendű elmélete, speciálisan az állandó gyorsulású megfigyelők létezését feltételezőkhöz már ez nem elég. Ehhez ki kell bővíteni az elmélet matematikai részét egyfajta (gyenge) halmazelmélettel. Mindez az általános relativitáselméletre is jelent következményeket [21].

2.2. Fénynél gyorsabban, dinamika

A relativitáselméletet néha abból vezetik le, hogy a fény sebessége határsebesség, azaz információ (okozati hatás) nem terjedhet gyorsabban mint a fény. Valóban, tudományos szenzációnak számított 2011-ben, hogy a CERN kísérlete alapján úgy tűnt, hogy létezhetnek fénynél gyorsabban mozgó neutrínók, és úgy tekintettek a kísérletre mint olyanra, ami megdöntheti a relativitáselméletet. Az 1-es pontban leírt szemlélettel árnyaltabb a kép. A relativitáselméletet abból is le lehet vezetni, hogy a fénysebesség állandó. Az

1 pontban leírt eredményünk azt mondja, hogy ha egy tetszőleges sebességet kitűntetünk és ilyen sebességű jelek használatával definiáljuk (építjük fel kísérletek eredményeként) a koordinátarendszereket, akkor a SpecRel nevű elméletet kapjuk (amiben pl. levezethető a Minkowski-metrika). Ha egy fénynél kisebb sebességet használunk a téridő "letapogatására", akkor megkapjuk tehát a speciális relativitáselméletet, de ebben lesznek a letapogatásra használt jeleknél gyorsabban mozgó jelek. Tehát úgy tűnik, hogy ha feladjuk a fénysebesség határsebesség voltát, de megtartjuk a fénysebesség állandó voltát, akkor még mindig megkapjuk a speciális relativitáselméletet szinte teljes egészében. Vizsgáltuk, hogy mik azok a fizikai jelenségek, amiknél kihasználjuk a fénysebesség határsebesség voltát. Ebben az irányban a következő eredményeket kaptuk.

— Annak alátámasztására, hogy a fénynél gyorsabb részecskék léte (információhordozó képességgel) önmagában nem mond ellent a speciális relativitáselméletnek, konstruáltunk minden véges téridő-dimenzióban egy olyan modellt, amiben minden téridő-egyenesen lehet információt küldeni (pontosan egy irányba), és amiben még sincsen információ-kör. Az információköröket az információ múltba való visszaküldéseként lehet értelmezni, és ezek paradoxonokat vetnek fel. Ezek a modellek teljesítik az einsteini relativitás elvét és minden inerciális megfigyelő számára mind a tér mind az idő homogén (de nem izotrop) bennük [3].

— Kidolgoztuk a relativisztikus dinamika (ütközések, tömeg) olyan verzióját, amely fénynél gyorsabban mozgó tömegpontokra is vonatkozik. Elsőrendű logikában megadtunk a speciális relativisztikus dinamikára egy természetes axiómarendszert úgy, hogy az axiómák a fénynél gyorsabb inerciális tömegpontokra is vonatkoznak. Megmutattuk, hogy a fénynél gyorsabb inerciális tömegpont létezése független az axiómarendszerünktől. Tehát az axiómarendszerünkkel konzisztens az, hogy létezik fénynél gyorsabb inerciális tömegpont. Megmutattuk azt is, hogy hogyan változik az inerciális tömegpont relativisztikus tömege és négyesimpulzusa koordinatarendszerről koordinátarendszerre. A fénynél gyorsabb inerciális tömegpontokra ez egy új eredmény, a fénynél lassabbakra pedig a megszokott eredményt kapjuk vissza.

Módszerünk erőssége az, hogy az általunk nyert számszerű dinamikai képlet egy maroknyi elvi álláspontot tükröző, egyáltalán nem számszerű axióma következménye. Ezzel azt is megmutattuk, hogy a kapott képlet nem egy a lehetséges jól működő képletek közül, hanem az egyetlen szóbajövő.

Az általunk levezetett képletből az derül ki, hogy fénynél gyorsabb tömegpont esetében a sebesség növelésével a relativisztikus tömeg és az impulzus is csökken. Negatív tömegű inerciális tömegpontok létezese is független az axiómarendszerünktől (ez összecseng a gyorsulva táguló Univerzum kozmológiai elméletéből adódó negatív energiasűrűségek lehetőségével), de ha van negatív tömegű inerciális tömegpont, akkor van fénynél gyorsabb is. Eredeti axiómarendszerünket ki tudjuk bővíteni úgy, hogy a fénynél gyorsabb inerciális tömegpont létezése független maradjon, de új axiómarendszerünkhöz hozzávéve azt, hogy nincs fénynél gyorsabb inerciális tömegpont (vagy azt, hogy van fénynél gyorsabb inerciális tömegpont) már teljes elméletet kapunk. Ez a szituáció analóg azzal, ahogy a geometriában a párhuzamossági axióma független a többi euklidészi axiómától [14, 20, 16].

— Megmutattuk, hogy ha vannak fénynél gyorsabb részecskék, akkor már a speciális relativitáselmélet keretei között is lehet a téridő sajátosságait kihasználva olyan kísérletet tervezni, ami eldönt egy nem Turing-kiszámítható problémát (például a halmazelmélet ZFC axiómarendszerének konzisztenciáját). Azt is megmutattuk, hogy ilyen kísérlet csak akkor létezik a speciális relativitáselmélet keretei között, ha vannak fénynél gyorsabb részecskék [18]. Megjegyezzük, hogy általános relativitáselméletben sarkosan más a helyzet, mint azt pl. [10]-ben megmutattuk.

— A téridőelméletek potenciálisan létező próbatestek illetve fotonok életútjáról szólnak. Ez alatt azt értjük, hogy pl. azt, hogy "bármely eseményben bármely irányban ki lehet küldeni egy fotont" úgy fejezzük ki, hogy "bármely eseményben bármely irányban kiindul egy (potenciálisan létező) foton". Relativitáselméletben van egy pár témakör, ahol kívánatos azonban megkülönböztetni az aktuálisan és potenciálisan létező dolgokat. Ilyen pl. a gondolatkísérletek leírása, ami különösen hiányzik a relativisztikus dinamika megfogalmazásánál. Megjegyezzük, hogy kozmológiában teljesen hasonló okokból használ intuicionista logikát a "fejlődő Univerzum" leírására a londoni Isham-iskola (ld. pl. Markopoulou előadásait, írásait). Modális logikát használtunk olyan vizsgálatok végzésére, ahol fontos különbséget tenni aktuálisan létező és potenciálisan létező objektumok között. Modális axiómarendszerünk keretében a relativisztikus tömeget expliciten lehet definiálni (azaz kísérletek megadásával) csak kinematikai fogalmakkal és egyetlen etalon test segítségével. Továbbá a modális elméletből (pár természetes segédaxióma hozzávételével) bebizonyítottuk a relativisztikus tömegnövekedési tételt, mely elvezet az Einstein-féle tömeg-energia ekvivalencia elvhez, azaz a híres $E = mc^2$ formulához [17].

3. Logikai és algebrai eszközeink vizsgálata, továbbfejlesztése

Legfontosabb eszközünk a matematikai logikában leginkább elterjedt ún. elsőrendű logika (FOL), több különböző formában, pl. többszortú, modális. Mivel ezt az eszközt fizikai elméletek vizsgálatára használjuk, különösen fontos az a kérdés, hogy a FOL mint eszköz használata szűkíti-e a lehetőségeinket, torzítja-e a vizsgálatainkat, mikor mely formáját, gyengítését lehet illetve nem lehet használni. A következő eredményeket kaptuk.

3.1. A logika vizsgálata

— A jelenlegi tudományos gondolkodás "anyanyelvét", az ún. elsőrendű predikátumkalkulust rekurzívan beleinterpretáltuk (másnéven lefordítottuk) egy igencsak egyszerű L(Df3) nevű modális kijelentéskalkulusba (mely algebrai formában nem más, mint egy Boole-algebra három kommutáló komplementált lezárási operátorral kibővítve). Ezzel egy régóta nyitott problémát oldottunk meg, és módszert adtunk más nyitott problémák megoldásához. Például, a fordítás mentén az L(Df3) modális kijelentéskalkulus örökli a Gödel nem-teljességi tulajdonságot a predikátumkalkulustól, továbbá a fordítás segítségével bizonyítható, hogy a Df3 algebraosztály szabadalgebrái nem atomosak. Ezen új eredményekről négy alkalomból álló ismeretterjesztő előadássorozatot tartottunk laikusok számára, ahol azt kívántuk megvilágítani, hogy hogyan használja a tudomány az "anyanyelvét", az elsőrendű predikátumkalkulust. A Tarski iskola köreiben jelentős visszhangot keltett ez az eredmény, mert sarkosan élesíti Tarskinak egy 1946-os eredményét (a Tarski-Givant könyv főtételét), és ezzel meg is oldunk nyitott problémákat a könyvből, ld. pl. [22, pp.89-90, p.124], [7].

— Bizonyítottuk, hogy a sztenderd dinamikus logika ZF-abszolút de nem KPU-abszolút. Ez a nem-abszolútság azt jelenti, hogy a dinamikus logika formalizálásánál használt halmazelméleti eszközök tulajdonságai szétválaszthatatlanul összefonódnak, összemosódnak a modellezni kívánt jelenséggel. A dinamikus logika fontos, a cselekvések következményeiről való gondolkodáshoz ad eszközöket (pl. programok helyességének bizonyítása, vagy pedig fizikai kísérletek eredményeiről szóló állítások). A dinamikus logika abszolút változata, az ún. nemsztenderd dinamikus logika, az elsőrendű FOL logika egy szelete. Ez is megerősíti azt a nézetünket, hogy a FOL mint eszköz alkalmas az általunk végzett vizsgálatokra [1].

— Megmutattuk, hogy ha n egy 2-nél nagyobb egész szám, akkor n darab változóval impliciten definiálható egy olyan n-argumentumú reláció, amelynek nem létezik n változójellel megadható explicit definíciója. Ez azt jelenti, hogy a definició cirkuláris, de a háttérelmélet minden modelljében pontosan egy reláció elégíti ki, tehát értelmes definició. Viszont a cirkularitást nem lehet eliminálni ebből a definicióból (ha csak n változójelünk van). Nem volt ismert, hogy létezik-e ilyen konstrukció $n = 4$ esetben, és a mostani konstrukció egyszerűsíti és egyesíti az $n \geq 3, n \neq 4$ esetekre ismert korábbi nehéz és diverz konstrukciókat. Technikai terminológiával mindez azt mondja, hogy a végesváltozós logikáknak nincs meg még a gyenge Beth definiálhatósági tulajdonságuk sem, mely fontos és sokat vizsgált tulajdonság. Különösen fontos ez a tulajdonság a jelen kutatásban, mert az explicit, cirkularitást nem tartalmazó definíciók az 1-es pontban leírt interpretációk fő alkotóelemei. A Beth definiálhatósági tulajdonság továbbá a tétel-bizonyító programoknál is lényeges szerepet játszik [9].

3.2. Algebrai logikai vizsgálatok

A matematikai logika algebrai logika nevű ágát is erőteljesen alkalmazzuk, ezért az ezekben előforduló algebraosztályokat is vizsgáljuk az algebra módszereivel.

— A számítástudományban központi szerepet játszó Kleene algebrák a már említett dinamikus logika algebrai formái. A Kleene algebráknak két motivációs részosztálya van, az ún. nyelvi modellek és az ún. relációs modellek, e két motivációs osztály azonosságelmélete megegyezik. Megmutattuk, hogyha a műveletek közé felvesszük a "metszet" műveletét (ez a programok párhuzamos futtatásának felel meg), akkor a nyelvi modellekben több azonosság teljesül mint a relációsakban, éspedig pontosan három azonossággal több (egy jólmeghatározott értelemben). Ha viszont a metszet hozzáadásával egyidejűleg elhagyjuk az üres szóból álló nyelvet (ami a semmit sem csináló programnak felel meg) mint konstanst a műveletek közül, akkor a két osztály azonosságelmélete ugyanaz marad. Megmutattuk, hogy a metszet műveletével kibővített Kleene algebrák szabadalgebrái már nem reprezentálhatók nyelvi modellekként, viszont ha kizárjuk az üres szóból álló nyelvet, akkor továbbra is reprezentálhatók nyelvi modellekként [5].

— A Kleene algebrák elméletét szokás vizsgálni úgy is, hogy a műveletekhez hozzáveszik a kompozíció (programok egymásutáni végrehajtása) reziduáltját, azaz egyfajta inverzét, mert így több szempontból jobban viselkedik az elmélet. A kompozíció végesen iterált műveletét iterációnak hívjuk (az irodalomban ezt legtöbbször * jelöli), ez a binér relációk tranzitív reflexív lezártjának illetve a programozáselméletben a loop programkonstrukciónak felel meg. Bizonyítottuk, hogy a reziduáltakkal kiegészített Kleene algebrákban érvényes iterációt-nem-említő azonosságokat nem lehet végesen axiomatizálni, még akkor sem, ha az axiomarendszerben olyan elsőrendű formulát is használhatunk, amiben az iteráció művelete előfordulhat. Kleene algebrákra ennek az ellenkezője igaz, ez Dexter Kozen eredménye. Eredményünk tehát azt mutatja, hogy annak az ára, hogy bizonyos tulajdonságai a Kleene algebraosztálynak jobbak lesznek a reziduált műveletének hozzávételével, az, hogy a Kleene algebrák egy szép axiomatizálhatósági tulajdonsága elvész [6].

— Az algebrai logikában használatos függvénysűrű relációalgebrákra adtunk egy új, az eddigieknél sokkal szemléletesebb és használhatóbb struktúraleírást [2].

— Bebizonyítottuk, hogy abból, hogy egy végtelen-dimenziós kvázi-poliadikus algebra cilindrikus-reduktuma reprezentálható, nem következik, hogy az egész algebra reprezentálható. A bizonyításban szerkesztettünk egy reprezentálható végtelen-dimenziós cilindrikus algebrát, amihez felvettünk absztrakt, a poliadikus axiómákat teljesítő permutáció-műveleteket úgy, hogy nem lehet az így kapott teljes kvázi-poliadikus algebrát reprezentálni. Ez az eredmény azt mutatja, hogy a permutáció-műveletek jelentősen megnövelik a cilindrikus algebrák kifejezőerejét [11].

(II) EREDMÉNYEINK HATÁSA, NÉPSZERŰSÍTÉSE, MÁS KUTATÓKKAL VALÓ KAPCSOLAT

A csoportunkban végzett relativitáselméleti és logikai munkát külföldön ismerik és elismerik. Ezt mutatja az is, hogy gyakran hivnak meg minket meghívott plenáris előadónak, szervező és programbizottsági tagnak külföldi konferenciákra. A jelen projekt ideje alatt a következő konferenciákon voltunk meghívott plenáris vagy valamilyen más módon kiemelt státuszú előadók a jelen projekt témájában: *Physics and Computation*, Egyiptom 2010 (meghívott plenáris előadás és tutorial, Madarász és Székely), *Topology, Algebra, and Categories in Logic*, Marseilles 2011 (featured plenary talk, Andréka és Németi), *The incomputable*, Chicheley Hall Anglia 2012 (meghívott plenáris előadás a relativisztikus kiszámíthatóság témakörben, Németi), *Symposium on the Future of Logic*, Amsterdam 2014 (meghívott plenáris előadás, Andréka és Németi), *Universal Logic*, Istambul 2015 (meghívott tutorial a relativitáselmélet logikai felépítéséről, Székely).

Logic and Relativity cimmel nagysikerű konferenciát szerveztünk 2012-ben Budapesten, ennek folytatásaként Logic, Relativity and Beyond cimmel hasonló konferenciát szervezünk 2015-re.

Külföldi kutatók meglátogatják csoportunkat abból a célból, hogy együtt kutassák a témát velünk (pl. Michele Friend USA, Michael Stannett Anglia, Daniele Molinini Olaszország, Thomas Benda Taiwan, Tarek és Amr Sayed-Ahmed Egyiptom, Pavel Pudlak Csehország részvételével háromnapos mini-workshop a relativitáselmélet logikai felépítéséről). Külföldi diákok gyakran csatlakoznak a kutatásainkhoz diplomamunka/disszertáció írása céljából (pl. Benjamin Hoffman USA, Mohamed Khaled Egyiptom, Koen Lefever Belgium).

Eredményeinket ismertetjük konferenciákon, szemináriumi előadásokban és egyetemi kurzusokban itthon és külföldon is (pl. London, Sheffield, Brüsszel). A következő konferenciákon tartottunk előadást a projekt időtartama alatt, a projekt témájából (a fentebb már említett meghívott előadásokon felül): Non-Euclidean Geometry and its Applications, 7-th Bolyai-Gauss-Lobachevsky Conference, Kolozsvár 2010 — Physics and Computation Workshop, 10th International Conference on Unconventional Computation, Turku Finland 2011 — How the world computes, Turing Centenary Conference, Cambridge 2012 — Foundations of Physics, München 2013 — Logic Colloquium, Vienna 2014 — 2nd workshop of the Budapest-Krakow research group, Krakkó 2014. A konferenciákon nem tudtunk volna résztvenni a jelen OTKA támogatás nélkül.

Hivatkozások

[1] Andréka, H., van Benthem, J. F. A. K., Bezhanishvili, N., Németi, I., *Changing a semantics: opportunism or courage?* In: **The life and work of Leon Henkin. Essays on his contributions**, Springer, 2014, pp.307-337.

[2] Andréka, H., Givant, S., *Functionally dense relation algebras*, **Algebra Universalis** 68,1-2 (2012), 151-191. IF: 0.446

[3] Andréka, H., Madarász, X. J., Németi, I., Stannett, M., Székely, G., *Faster than light motion does not imply time travel*, **Classical and Quantum Gravity** 31:(9) Paper 095005. (2014). IF: 3.103*

[4] Andréka, H., Madarász, X. J., Németi, I., Székely, G., *A note on "Einstein's special relativity beyond the speed of light by James M. Hill and Barry J. Cox"*, **Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Science** 469:(2154), (2013). IF: 1.998

[5] Andréka, H., Mikulás, Sz. and Németi, I., *The equational theory of Kleene lattices*, **Theoretical Computer Science** 412 (2011), 7099-7108. IF: 0.665

[6] Andréka, H., Mikulás, Sz., Németi, I., *Residuated Kleene Algebras*, In: **Logic and program semantics. Essays dedicated to Dexter Kozen on the occasion of his 60th birthday** LNCS 7230, Springer-Verlag, Berlin, 2012. pp.1-11,

[7] Andréka, H., Németi, I., *Reducing first-order logic to Df_3, free algebras*, In: **Cylindric-like algebras and algebraic logic**, Springer Verlag, Berlin, 2012. pp.15-35.

[8] Andréka, H., Németi, I., *Comparing theories: the dynamics of changing vocabulary*, In: **Johan V. A. K. van Benthem on logical and informational dynamics**, Springer Verlag, 2014. pp.143-172. arXiv:1307.1885

[9] Andréka, H., Németi, I., *Finite-variable logics do not have weak Beth definability property*, In: **The road to universal logic Vol 2. Festschrift for 50th birthday of Jean-Yves Beziau**, Springer, 2014, 10pp. arXiv 1409.5059

[10] Andéka, H., Németi, I., Németi, P., *General relativistic hypercomputing and foundation of mathematics*, **Natural Computing** 8,3 (2009), 499-516.

[11] Andréka, H., Németi, I., and Sayed Ahmed, T., *A non representable infinite dimensional quasi-polyadic equality algebra with a representable cylindric reduct*, **Studia Sci. Math. Hungar.** 50,1 (2013), 1-16. IF: 0.627

[12] Ax, J., *The elementary foundations of spacetime.* **Foundations of Physics** 8,7-8 (1978), 507-546.

[13] Govindarajulu, N. S., Bringsjord, S., Taylor, J., *Proof Verification and Proof Discovery for Relativity*, In: **Synthese**, online first DOI 10.1007/s11229-014-0424-3, 2014.

[14] Madarász, X. J., Stannett, M., Székely, G., *Why Do the Relativistic Masses and Momenta of Faster-than-Light Particles Decrease as their Speeds Increase?*, **Symmetry Integrability and Geometry-Methods and Applications** 10: (5) pp. 1-21. (2014). IF: 1.299

[15] Madarász, X. J., Székely, G., *Special Relativity over the Field of Rational Numbers*, **International Journal of Theoretical Physics** 52:(5) pp. 1706-1718., (2013). IF: 1.186

[16] Madarász, X. J., Székely, G., *The Existence of Superluminal Particles is Consistent with Relativistic Dynamics*, **Journal of Applied Logic** 122:(4), pp. 477-500. (2014), IF: 0.395 arXiv:1303.0399.

[17] Molnár, A., Székely, G., *Axiomatizing Relativistic Dynamics using Formal Thought Experiments*, **Synthese**, online-first DOI 10.1007/s11229-014-0545-8 , pp.1-44. (2014) http://philsci-archive.pitt.edu/9914/. IF: 0.637

[18] Németi P; Székely G: *Existence of Faster Than Light Signals Implies Hypercomputation Already in Special Relativity*, **Lecture Notes in Computer Science** 7318, pp. 528-538., (2012).

[19] Stannett, M., Németi, I., *Using Isabelle/HOL to verify first order relativity theory*, **Journal of Automated Reasoning**, 52,4 (2014), 361-378. IF: 0.468 arXiv:1211.6468

[20] Székely G: *The existence of superluminal particles is consistent with the kinematics of Einstein's special theory of relativity*, **Reports on Mathematical Physics** 72:(2) pp. 133-152. (2013). IF: 1.042

[21] Székely, G., *What algebraic properties of quantities are needed to model accelerated observers in relativity theory?*, In: **Conceptual clarifications. Tributes to Patrick Suppes** College Publications, London, 2015, to appear. arXiv:1210.0101

[22] Tarski, A., Givant, S., *A formalization of set theory without variables*, **AMS Colloquium Publications** Vol.41, Providence, RI, 1987.