

Zárójelentés

a FIZ:78005 azonosítójú "Fizika és számelmélet"

OTKA kutatási pályázatról

(vezető kutató Bántay Péter)

Az elméleti fizika és a számelmélet között – bár látszólag érintkezési pont nélküli, távoli diszciplínák – érdekes kapcsolatok kerültek felszínre az elmúlt évtizedekben, például a kvantum káosz és az automorf szórás elméletében, vagy a húramplitúdók p -adikus elfolytatásával összefüggésben. E kapcsolatok széles tárházát szolgáltatják a kétdimenziós konform térelméletek, melyek partíciós függvényei, illetve az azok építőköveiként szolgáló konform karakterek az analitikus számelmélet szempontjából is alapvető fontosságú moduláris formák elméletének segítségével vizsgálhatók. Valójában a klasszikus elmélet egy messzemenő általánosítására van szükség e vizsgálatokban, az ún. vektor-értékű moduláris formák elméletére, amely geometriai szempontból a moduláris görbe feletti holomorf vektornyalábok elméletének felel meg (szemben a klasszikus elmélettel, amely a holomorf vonalnyalábok leírását szolgáltatja).

Bár a vektor-értékű moduláris formák elméletének jelentőségét a múltban többen is felismerték és kezdeményezték a téma tanulmányozását, mégis csak a kétezres évek elején kezdték meg annak szisztematikus vizsgálatát. Az első, matematikusok által folytatott vizsgálatok alapvetően a klasszikus elmélet módszereinek és eredményeinek általánosítását tűzték ki célul, nem elhanyagolható sikereket érve el ezen a téren. Egy hiányossága mégis volt ezen hozzáállásnak: nem adott effektív eszközöket a vektor-értékű moduláris formák számítására. Ez motiválta egy pragmatikusabb, az elméleti fizika számítási igényeinek jobban megfelelő megközelítés kidolgozását a kétezres évek derekán, amely lehetővé tenné a karaktervektorok tulajdonságainak konkrét vizsgálatát: ennek megalapozását végezte el a vezető kutató a 2005-2008-as években Terry Gannon-nal, a University of Alberta matematika professzorával együttműködésben, és erre a gyümölcsöző együttműködésre alapult a projekt kutatási terve, az elmélet továbbfejlesztését és fizikai alkalmazásainak kidolgozását tűzve ki célul.

Célszerű mindjárt leszögezni, hogy a projekt csak részben valósította meg a kitűzött ambiciózus célokat: míg jelentős eredmények születtek olyan - a

fizikai alkalmazások szempontjából döntő fontosságú - kérdésekben, mint a vektor-értékű moduláris formák által kielégített invariáns differenciál-egyenletek teljes körű jellemzése, a holomorf moduláris formák leírása és a független formák számának meghatározása, az egyszerű áramok fogalmának megfelelő általánosítása és elméletének kiterjesztése, vagy a permutációs orbifold konstrukció implementációja, addig más, tervbe vett kutatási irányokban, például a vektor-értékű Jacobi-formák vagy a (véges indexű) részcsoportok formáinak vizsgálatában nem sikerült jelentős haladást elérni.

A fent említett részleges sikertelenség magyarázatául mind szubjektív, mind objektív okok megemlíthetők. A szubjektív ok a külföldi partnerrel való kutatási együttműködés megszakadása (2011 során), és a már elért eredmények publikálásával kapcsolatban felmerülő véleménykülönbségek. Ennek következményeként a kutatás során elért eredmények egy része - például az egyszerű áramokkal, illetve a permutációs orbifoldizációval kapcsolatosak - még nem került publikálásra: ez a helyzet remélhetőleg változni fog a közeljövőben. Természetes módon a (volt) külföldi partner szakterületének számító témákban (Jacobi-formák, általános automorf formák) a kutatási terv teljesülése megrekedt, illetve az eredmények külön kerültek publikálásra.

Ami az objektív okokat illeti, itt első helyen említendőek az úttörő kutatási téma kidolgozása során felmerülő, előre nem látható elvi és gyakorlati nehézségek. Az elvi nehézségek között kiemelkedő jelentőségű a konform térelméleti moduláris ábrázolás és a karaktervektor transzformációs tulajdonságai között fennálló kapcsolat nem egyértelmű volta, ami a konform karakterek között fennálló lineáris összefüggésekre vezethető vissza. Röviden megfogalmazva arról van szó, hogy bár a karaktervektor moduláris transzformáltjai meghatározhatók a moduláris ábrázolás ismeretében, ez fordítva már nem mindig áll fenn, tekintve, hogy a karaktervektor argumentumának változása során mindvégig az ábrázolási tér egy invariáns alterében mozog, ezért a karaktervektor transzformációs tulajdonságai csak a moduláris ábrázolásnak erre az invariáns alterre vonatkozó megszorítására szolgálnak

információval: általános példa e jelenségre a nem-triviális töltéskonjugáció esete, hiszen töltéskonjugált primér terek konform karakterei szükségképpen megegyeznek egymással, de a jelenség ennél sokkal általánosabb. Itt természetesen arról van szó, hogy két különböző jellegű leírás egymáshoz való viszonyát vizsgáljuk: míg a konform karakterek az elmélet lokális tulajdonságairól (energiaspektrum, operátor tartalom) adnak tájékoztatást, addig a moduláris ábrázolás, illetve az annak alapjául szolgáló moduláris tenzorkategória az elmélet globális tulajdonságait (szimmetriatöltések kompozíciója, szuperselektív szektorok, konzisztens peremfeltételek) jellemzi, és ezek között a modulár-invariancia követelménye teremt (nem egyértelmű) kapcsolatot.

A fenti megjegyzések megvilágítják a nehézség eredetét: bár matematikai szempontból természetesnek tűnik a moduláris ábrázolás redukciója a karaktervektort tartalmazó invariáns altérre, és ezen redukált ábrázolás vektorértékű formáinak vizsgálata, e redukció során döntő jelentőségű fizikai információ menne veszendőbe, ezért egy alternatív, a teljes moduláris ábrázolást alapul vevő, de a komponensek közötti lineáris relációkat figyelembe vevő formalizmus használata szükséges¹. A megfelelő matematikai háttér és annak fizikai tartalmának kifejlesztése jelenleg is folyamatban van, és vélhetőleg fontos adalékul szolgál majd néhány később említendő eredmény továbbfejlesztésében.

Ami a felmerülő gyakorlati nehézségeket illeti, itt alapvetően az egyes elméleti konstrukciók és számítási eljárások algoritmizálása okoz problémát. Ugyanis a moduláris csoport ábrázolásainak több egyenértékű karakterizálása lehetséges - például a generátorok ábrázolási operátorai, vagy pedig az exponens és karakterisztikus mátrixok segítségével -, de az ezek közti kapcsolat messze nem triviális. Bár megadható egy zárt kifejezés - az ún. Rademacher-Petersson-sor - a karakterisztikus mátrixra az ábrázolási mátrixok segítségével

¹Ez különösen igaz a permutációs orbifoldizáció esetén, ahol a permutációs orbifold karaktervektorára vonatkozó relációk egy része az orbifoldizáció előtti karaktervektor által kielégített nemlineáris replikációs összefüggések következménye, amelyek fontos szerepet játszanak például a "Holdvilág" (Moonshine) jelenségének magyarázatában.

vel, de ennek gyakorlati használatát megakadályozza lassú konvergenciája és tagjainak transzcendens volta, ami annál figyelemreméltóbb, mert mindkét említett jellemző (algebrai) egészek segítségével írható le a fizikailag releváns esetekben. Ezen transzcendens összefüggések algoritmikus kezelése okozza alapvetően a nehézségeket.

A fenti előzetes megjegyzések után következzenek a kutatási projekt során elért eredmények vázlatos ismertetése.

1. Adott vektor-értékű moduláris forma által kielégített invariáns differenciálegyenletek jellemzése

Sikerült visszavezetni egy adott vektor-értékű moduláris formát eltüntető invariáns differenciáloperátorok algebrájának meghatározását egy polinom-algebrai feladatra [3], amelynek algoritmikus megoldása ismert a szakirodalomból. Ezen eredmény lehetővé teszi, hogy meghatározzuk egy adott karaktervektorral rendelkező fizikai modell szimmetria-algebrájának nullvektor egyenleteit, amelyet felhasználhatunk például a korrelációs függvények számolásakor.

2. Holomorf formákra vonatkozó dimenzió-formula elemi származtatása

Sikerült a holomorf formák terének egy lineáris algebrai jellemzését megadni, amiből elemi megfontolásokkal származtatható [4] a korábban ismert, de igen mély algebrai és analitikus eszközök felhasználásával (Eichler–Selberg-féle trace-formula) származtatott dimenzió-formula. A lineáris algebrai jellemzés elvileg algoritmikus eljárást ad a holomorf formák egy bázisának meghatározására (tetszőleges súlyban), bár ennek naiv implementációja messze nem effektív.

3. Holomorf formákra vonatkozó trace-összefüggések származtatása

Az elliptikus transzformációk ábrázolási operátorainak spurja és a holomorf formák Hilbert-polinomjának (amely a szabad generátorok súlyeloszlását írja le) az adott transzformáció fixpontjainál felvett értékei között sikerült nem-triviális összefüggéseket találni [5], amelyek a ho-

lomorf formák lineáris algebrai jellemzésével összevetve már effektív módszert adnak a generátorok meghatározására.

4. Fundamentális mátrix meghatározása ismert karaktervektorokból

Gyakorlati szempontból fontos kérdés annak megválaszolása, hogy hogyan lehet meghatározni (ha egyáltalán lehetséges) a fundamentális mátrixot formák egy adott halmazának ismeretében. Elvileg a válasz egyszerű: határozzuk meg a moduláris ábrázolást akár csak egyetlen forma transzformációs tulajdonságaiból, majd ebből az ehhez tartozó karakterisztikus mátrixot, végül pedig a fundamentális mátrixot a megfelelő hipergeometrikus egyenlet megoldásából. A feladat ennek a bonyolult eljárásnak a rövidre zárása lenne, a fundamentális mátrix közvetlen meghatározása az adott formákból, felhasználva azok ismert tulajdonságait. Természetesen, a módszer csak akkor adhat egyértelmű eredményt, ha a formák komponensei kifizítik az egész ábrázolási teret. A formák által kielégített invariáns differenciálegyenletek vizsgálata segítségével kidolgozható egy alkalmas algoritmikus eljárás eme feladat elvégzésére.

5. Holomorf formák együtthatóinak számelméleti tulajdonságai

Ismert, hogy a (racionális) konform térelméletben előforduló moduláris ábrázolások magja szükségszerűen egy kongruencia-részcsoport, aminek következtében az ábrázolási mátrixelemek jól meghatározott Galois-transzformációs tulajdonságokkal rendelkező ciklotomikus számok, és ennek következtében a holomorf formák terében mindig választható egy integrális bázis, melynek sorfejtési együtthatói (racionális) egészek. Az ilyen jellegű eredmények érvényességi körének pontos meghatározása nem csak a fizika szempontjából érdekes, de fontos szerepet játszhat a nem-kongruencia részcsoportokkal kapcsolatos vizsgálatokban is. Általános eljárást dolgoztunk ki egy adott ábrázolás Galois-transzformáltjainak meghatározására, és ennek révén vizsgáltuk

a Galois-transzformáltak fundamentális mátrixainak viszonyát, illetve a sorfejtési együtthatók számelméleti tulajdonságait.

6. Egyszerű áramok elméletének kiterjesztése

Az egyszerű áramok fogalma fontos szerepet játszik a konform térelméletben és alkalmazásaiban. Kiderül, hogy a fogalom messzemenően általánosítható a moduláris csoport projektív ábrázolásainak egy széles halmazára, ahol a klasszikus elmélethez igen közeli eredmények származtathatóak, és ezek hasznosíthatóak az adott ábrázolás szerint transzformálódó formák analízisében. Ez különösen fontos lehet húr-elméleti alkalmazásokban az általánosított GSO-projekciókkal kapcsolatban.

7. Hecke-operátorok hatásának vizsgálata vektor-értékű formákon

A Hecke-operátorok nem csak a klasszikus elmélet egyik alapvető részét alkotják, de fontos szerepet játszanak annak majd összes alkalmazásában. Fizikai jelentőségük a permutációs orbifoldokkal kapcsolatos: a permutációs orbifold karaktervektorát az eredeti elmélet karaktervektorának különböző Hecke-transzformáltjaiból lehet felépíteni. Ebben a kérdéskörben igen fontos (és nehéz) probléma az orbifoldizáció utáni karaktervektor algoritmikus meghatározása, amelynek során bonyolult csoportelméleti és kombinatorikai kérdések merülnek fel. Sikerült egy általános (bár elég számításigényes) eljárást megadni az orbifold karaktervektorának meghatározására, ezáltal lehetővé téve a téma részletes tanulmányozását. Többek közt ez segített annak felismerésében, hogy milyen fontos, és a szakirodalomban nem kellően hangsúlyos szerepet játszanak a karaktervektor komponensei között fennálló lineáris összefüggések.

A felsorolt eredményeket két (referált) konferencia-közlemény [1,2], valamint két már megjelent [3,4], és egy közlésre elfogadott [5] referált folyóiratcikk tartalmazza. A támogatott kutatás eredményeit több nemzetközi konferen-

cián (Dubrovnik 2009, Edinburgh 2009, Zagreb 2011, Karlstad 2011, Banff 2011, Leeds 2013, London 2013), ill. külföldi kutatóműhelyekben tartott szemináriumon (Zürich 2009, Zágráb 2010, Róma 2012, Hamburg 2013) ismertetem. Közlés előtt áll egy összefoglaló cikk az egyszerű áramok fogalmának kiterjesztéséről, és előkészületben van egy további ismertető az orbifoldizáció algoritmikus problémáiról.

Néhány szó az elért eredmények lehetséges hasznosításáról. Az invariáns differenciálegyenletek osztályozása már szerepet kapott, többek közt a háromdimenziós kvantumgravitációra vonatkozó Witten-féle javaslat, illetve az ún. Haagerup-szubfaktor realizálhatóságával kapcsolatos vizsgálatokban. A holomorf formákra vonatkozó eredmények (dimenzió-formula és trace-összefüggések) alapján lehetővé válik az adott ábrázolás szerint transzformálódó holomorf formák szabad generátorainak explicit meghatározása. Az egyszerű áramok fogalmának kiterjesztése és az ezekből a karaktervektorra adódó összefüggések megértése az egész kutatás egyik implicit célja volt, tekintve a lehetséges húrelméleti alkalmazásokat. És végül, de egyáltalán nem utolsósorban, a Hecke-hatás (ill. a permutációs orbifoldizáció) kapcsolatot teremthet egyfelől a másodkvantált húrelmélet, másfelől a "Holdvilág" jelensége között, ezáltal fizikai interpretációját nyújtva az utóbbinak.

Összegzésül, a kutatási projekt tervében megfogalmazott ambiciózus célkitűzéseknek ugyan nem mindegyike teljesült maradéktalanul, de ennek ellenére értékelhető előrehaladást sikerült elérni a vizsgált témakörökben, amelyek továbbfejlesztése további érdekes eredményekkel kecsegtet.

Befejezésül szólni kell a projekt futamidejének többszöri meghosszabbításáról és az előzetes költségtervtől történő minimális mértékű eltérésekről. A futamidő többszöri hosszabbítását azon kormányzati takarékosági intézkedés indokolta, amely nem engedélyezte a számítástechnikai jellegű beruházásokat a felsőoktatásban. Ennek következtében nem nyílt mód a projektben tervezett informatikai fejlesztésekre, amelyek pedig nélkülözhetetlenek az eredményes kutatómunkához. Erre a körülményre tekintettel sikerült a

futamidő meghosszabbítását engedélyeztetni, és több év késéssel szert ejteni a nélkülözhetetlen fejlesztésekre, ezáltal megteremtve az elengedhetetlen infrastrukturális háttérrel a további kutatásokhoz. Célszerűnek tűnt továbbá a külföldi utazásokra szánt keretből fennmaradt minimális összegeket szintén átcsoportosítani e célra.

Budapest, 2014 július 30.

Bántay Péter

vezető kutató

OTKA támogatást feltüntető közlemények:

1. P. Bantay, *Vector-valued modular forms*, Contemp. Math. **497**, 19-31 (2009).
2. P. Bantay, *Characters of crossed modules and premodular categories*, London Math. Soc. LNS **372**, 1-12 (2010).
3. P. Bantay, *Modular differential equations for characters of RCFT*, **JHEP** (2010) **1006**:0021.
4. P. Bantay, *The dimension of spaces of vector-valued modular forms of integer weight*, Lett. Math. Phys. (2013).
5. P. Bantay, *A trace formula for vector-valued modular forms*, Commun. Contemp. Math., közlésre elfogadva.