

# OTKA pályázat zárójelentés

## K76810

Kis Tamás

2011. december 1.

### 1. Bevezetés

A kutatás célja új matematikai modellek és módszerek kidolgozása volt integrált gyártástervezési, és ütemezési problémák megoldására. Ez egy ipari eredetű problémakör, amelyben a különböző időhorizonton dolgozó, és különböző érdekeltésgű döntéshozók munkáját kell összehangolni annak érdekében, hogy a rendelkezésre álló erőforrásokat optimálisan használhassák ki.

A kutatás során különféle, a témába eső problémát modelleztünk, és többféle algoritmikus módszert dolgoztunk ki. Számos eredményünk a probléma kétszintű optimalizáláson alapuló megközelítésén alapul. Azért fektettünk különös hangsúlyt a kétszintű optimalizálásra, mert ez még egy járatlan, alig feltárt terület, legalábbis az ütemezéseméletet illetően.

A kutatás során született algoritmusok egy-egy probléma optimális megoldását, vagy az optimum approximálását teszik lehetővé. Az algoritmusok egy része polinomiális idejű, de nagyobb számban fordulnak elő exponenciális idejű algoritmusok NP-nehéz problémák megoldására. Több algoritmusunk úgynevezett vágósíkos, korlátozás és szétválasztáson alapuló módszer, amely egy lineáris programon alapuló modellhez ad új, érvényes egyenlőtlenségeket a lineáris relaxáció erősítése érdekében. Továbbá az egyik problémára adott megoldásunk korlátozás programozáson alapul, ahol logikai következtetésekkel próbálunk egy optimális megoldást találni. Az ilyen jellegű módszerek kidolgozásában fontos szerep jut az implementálásnak, és a tesztelésnek, valamint a kísérletezésnek. A tesztelés és kísérletezés célja nem egyszerűen a legjobb, legszebb eredményeket adó paraméterek megtalálása, hanem a megfelelő, a megoldás során igazán hatékony vágósíkok, vagy propagációs eljárások kiválasztása, vagy akár megtalálása.

### 2. Kétszintű optimalizálással kapcsolatos eredmények

A kétszintű optimalizálás eredete a játékelméletből jól ismert Stackelberg játékok, ahol a piacvezető meg akarja határozni az általa gyártott mennyiséget, ismerve a követők árszabási stratégiáit. Olyan mennyiséget akar

gyártani, ami által a kialakuló piaci ár számára a legnagyobb profitot hozza [9].

A kétszintű ütemezési problémák közül talán a legegyszerűbb a  $P||\sum w_j C_j$  egyszintű ütemezési probléma általánosítása [3]. A kétszintű modellben a vezető gépekhez rendeli a feladatokat, míg a követő sorrendezi a gépeken a feladatokat a saját célfüggvénye szerint. A vezető célfüggvényének értékét a követő által kialakított sorrend határozza meg. Tehát a vezetőnek nagy gondnal kell a munkákat gépekhez rendelni. Ennek a problémának számos speciális esetét vizsgáltuk, amelyek különböző jóságú és időbonyolultságú algoritmusokhoz vezettek. Ugyanebben a cikkben vizsgáltuk az egygépes rendeléselfogadási problémát is, ahol a vezető az  $1||\sum w_j U_j$  problémát oldja meg (azaz az elutasított munkák súlyát minimalizálja), míg a követő az elfogadott munkákat sorrendezi. A vezetőnek olyan munkahalmazt kell elfogadnia, amelynek súlya maximális, és a követő optimális sorrendje esetén minden elfogadott munka időben elkészül. Mivel a követő ütemezési problémája polinomiális időben megoldható, illetve az optimális sorrend jól jellemezhető, ezért a kétszintű problémát dinamikus programozással meg lehet oldani, vagy akár hatékonyabban is, ha a vezető számára minden munka egyforma súlyú. Amennyiben a munkáknak a legkorábbi kezdési ideje eltérő, nem azonosan 0, akkor a követő sorrendezési problémája NP-nehéz, így nincs tömör reprezentációja az optimális megoldásoknak. Kidolgoztunk és implementáltunk egy korlátozás programozáson alapuló egzakt megoldó módszert. A megoldás újszerűségén kívül a már megjelent cikkben azt is megmutattuk, hogy más, logikai programozáson alapuló megoldási módszerek alkalmatlanok a vizsgált ütemezési probléma megoldására [6].

Négy különféle modellt vetettünk össze a sorozathossz tervezési probléma megoldására termelési hálózatokban. Ebben a problémában egy beszállító (követő) szolgálja ki a gyártót (vezető), és a gyártó a hozzá érkező igények alapján határozza meg a beszállító felé az igényeket. A négyféle modell a gyártó és a beszállító lehetséges együttműködési formáit írja le, és a megoldásra 3 esetben egzakt módszert adtunk. Az egyik érdekes megközelítés kétszintű optimalizáláson alapul, ahol a gyártó ismeri a beszállító költségeit, és az alapján határozza meg felé az igényeket, előre kiszámítva, hogy milyen választ kaphat a beszállítótól. Ennek a modellnek a megoldása egy diszkrét kétszintű optimalizálási probléma megoldását igényli, ahol a 2. szint célfüggvényébe kerül a felső szint által számított igény [7]. Ebben a cikkben egy enumeráláson alapuló, csak kis méretű feladatpéldányok kezelésére alkalmas módszert adtunk a kétszintű sorozathossz tervezési problémára.

A kétszintű sorozathossz tervezési problémára dolgoztunk ki egy hatékony megoldó módszert a [5] kéziratban. A megoldás alapötlete, hogy a követő optimalizálási kritériumait a probléma primál, és egy kiterjesztett duál felírás együttesével fejezzük ki. Ezen túl tovább erősítettük a lineáris relaxációt az optimális megoldásokra érvényes egyenlőtlenségekkel is. Az eredmény egy hatékony megoldó, amelynek hatékonysága még további érvényes egyen-

lőtlenségekkel növelhető.

A sorozathossz tervezési problémákhoz kapcsolódik, hogy hogyan tudja a gyártó (vezető) kitalálni, milyen költségekkel dolgozik egy beszállítója. Erre a kérdésre adtunk egy kezdeti választ a [8] kéziratban. A megközelítésünk lényege, hogy a beszállító korábbi válaszai alapján becsüljük a költségparamétereket egy "inverz" sorozathossz tervezési probléma megoldásával.

Végezetül megemlíjtük a [2] kéziratot, amelyben általánosított lineáris komplementaritási feltételekből generáltunk diszjunktív vágásokat, illetve azok erősítésére általánosítottuk a "lift-and-project" eljárást, amit eredetileg a Gomory vágások erősítésére dolgoztak ki a 0-1 vegyes-egészértékű programozásban. Célunk az volt, hogy a lineáris kétszintű optimalizálási problémákban az optimalitási feltételekből, melyek komplementaritási feltételekként jelennek meg, új, erős vágósíkokat generáljunk. Az eddigi számítási eredmények nem igazolták ezt a várákozást, a leghatékonyabbnak a komplementaritási feltételeken való szétválasztás bizonyult. Egy másik, kapcsolódó kutatási eredményt a 4. Fejezetben mutatunk be.

### **3. Integrált tervezés és ütemezés: kompakt probléma felírás és vágósíkok**

A kétszintű tervezés és ütemezés problémát vizsgáltuk, és egy vágósíkos egzakt megoldó algoritmust dolgoztunk ki. A modellben a felső szinten hetekhez kell rendelni a munkákat, míg a részletes ütemezés egy párhuzamos gépes ütemezési probléma megoldását igényli minden hétre az adott hétre eső feladatokkal. A nehézséget az adja, hogy utóbbi probléma is NP teljes. A feladatot kétféle módon modelleztük. Egyrészt egyetlen nagy MIP-el, másrészt egy hierarchikus matematikai programmal. A hierarchikus megközelítés alapötlete egy kompakt probléma felírás, amelyben a párhuzamos gépes ütemezési problémákat nem írjuk le explicit, hanem a Párhuzamos gépes és a Hátizsák pakolási probléma kapcsolatát felhasználva, alkalmas vágósíkokkal helyettesítjük. A két módszert többféle méretű és nehézségű problémán vetettük össze, és behatároltuk azokat a probléma jellemzőket, amelyek a hierarchikus megoldási módszert előnyössé teszik [4].

### **4. Új vágósíkok a vegyes-egészértékű programozási problémára**

Vegyes egészértékű programok megoldása alapvetően fontos a fenti problémák megoldásában. A simplex tábla elemzésével különféle vágósíkokat lehet generálni. Az egyik jól ismert vágás a Gomory vágás. A Gomory vágás erősíthető a "lift-and-project" módszerrel. Azonban ez a módszer hatékonyan eddig csak egyszerű diszjunkciókra működött, azaz  $x_k \leq 0 \vee$

$x_k \geq 1$ , ahol  $x_k$  változó csak egész értékeket vehet fel. A fenti eljárást általánosítottuk tetszőleges "split" diszjunkciókra, azaz az egész változók tetszőleges egész együtthatós kombinációjával nyert diszjunkciókra. Továbbá megmutattuk, hogyan lehet kombinálni a "Reduce-and-Split" vágás erősítő módszerrel, melynek célja, hogy a vágások együtthatóit csökkentse, ezzel erősítve azokat [1].

## 5. Tanulságok

Az eddigi kutatási eredmények több tanulság leszűrését teszik lehetővé:

1. A diszkrét kétszintű optimalizálási problémák megoldása akkor lehet hatékony, ha valamilyen módon jellemezni tudjuk a követő optimális megoldásait. A kutatás során több ilyen jellegű eredmény született [3, 5, 6], talán a legáltalánosabbat a [5] kéziratban írjuk le. Ugyanakkor a lineáris kétszintű optimalizálási problémák megoldásában bevett komplementaritási feltételek nem vezetnek hatékony megoldáshoz.
2. Azok a kétszintű optimalizálási problémák, ahol a követő (2. szint) problémája NP-nehéz, lényegesen nehezebbek, mivel ekkor a feladat minden megengedett megoldása egyben egy NP-nehéz optimalizálási probléma *optimális* megoldását tartalmazza. Az ilyen problémák nehezebbek, mint az NP-nehéz problémák, mivel általában nem tartoznak az NP osztályhoz.
3. A kiterjesztett probléma felírások mellett, aholis az eredeti probléma változókon túl új változókat, és korlátokat vezetnek be a probléma lineáris relaxációjának erősítésére, a kompakt felírások is hatékonyak lehetnek. A kompakt felírásban elhagyjuk a probléma változók egy részét (lényegében projektáljuk a problémát egy altérre), és alkalmas vágósíkokkal próbáljuk ellenőrizni, hogy az aktuális megoldás benne van-e a projektált probléma megoldáshalmazában [4]. Bár a projekció a Fourier-Moztkin eliminációval egzaktul meghatározható, de ahhoz ismerni kell a probléma megengedett megoldásainak lineáris reprezentációját, ami NP-nehéz problémák esetén nem áll rendelkezésre.

## Hivatkozások

- [1] Balas E., Cornuejols G., Kis T., Nannicini G., Combining Lift-and-Project and Reduce-and-Split, INFORMS Journal on Computing, feltételesen elfogadva, 2010.
- [2] Kis T., On cut generation for facial disjunctive programs with two-term disjunctions, kézirat, 2009.

- [3] Kis T., Kovács A., On bilevel machine scheduling problems, OR-Spectrum, nyomdában, 2010.
- [4] Kis T., Kovács A., On hierarchical planning and scheduling in a parallel machine environment, Computers & Operations Research, 39 (2012) 320-327.
- [5] Kis T., Kovács A., On bilevel lot-sizing problems, kézirat, 2011.
- [6] Kovács A., Kis T., Constraint programming approach to a bilevel scheduling problem, Journal of Constraints, 16 (2011) 317-340.
- [7] Kovács A., Egri P., Kis T., Váncza J., Inventory control in supply chains: A comparative analysis of fundamental approaches, International Journal of Production Economics, feltételesen elfogadva, 2011.
- [8] Egri P., Kis T., Kovács A., Váncza J., An inverse economic lot-sizing approach to eliciting supplier parameters, konferenciára beküldve, 2011.
- [9] von Stackelberg H., Marktform und Gleichgewicht, Verlag von Julius Springer, 1934.