

Zárójelentés OTKA76099

Jelentős eredményeket értünk el a gráfelmélet, geometria, sztochasztika és algoritmusok kérdéskörében, sokszor a területek közös elméletét gyarapítottuk.

A több mint 90 publikációból kiemelem az általam legértékesebbeknek tartottakat. Az alábbi eredményeket a kutatási terv struktúráját követve csoportosítom.

GRÁFELMÉLET

A Hadwiger-sejtés a kombinatorika egyik központi kérdése. A sejtés szerint, ha egy gráf nem tartalmaz t -klikket minorke nt , akkor t -1-színezhető. A $t=5$ eset Wagner egy tétele, a négyszín-tétel egy általánosítása. A színezési kérdéseket kiterjesztik lista színezési kérdésekké. Ekkor nem egy globális palettával színezzük gráfunkat, hanem minden csúcshoz van egy lokális palettája. Thomassen egy nevezetes tétele állítja, hogy minden síkgráf 5-lista színezhető. Az 5 paraméter optimális. Természetesen merül fel a kérdés a Hadwiger-sejtés lista színezési változatára. Barát társszerzőkkel megmutatja, hogy a legtermészetesebb változata a sejtésnek nem igaz. Konstruálnak egy olyan t -klikket minorke nt nem tartalmazó gráfot, amely lista kromatikusszámára $(4/3)t$ nagyságrendű alsó becslés adható.

Legyen q egy fix természetes szám. Legyen G egy q -részes gráf egyenlő osztályokkal qn csúcson. Legyen $\delta = k/(k+1)$, ahol $k = q + \mathcal{O}(\log q)$. Csaba igazolta, ha G mindegyik csúcsa legalább δn csúccsal szomszédos az osztályától eltérő bármelyik részben, továbbá n elég nagy, akkor G -nek van K_q faktora. Azaz csúcsai lefedhetők diszjunkt q pontú klikkekkel.

Ritka K_{r+1} -mentes gráfok tipikus struktúrája: A kombinatorika kutatások két központi témája a véletlen gráfok evolúciója (Erdős—Rényi) és a H -mentes gráfok vizsgálata. Fontos annak megértése hogy n ponton a tipikus m élű H -mentes gráf struktúrája hogyan változik ha m 0-tól kezdve nő $ex(n; H)$ -ig. Balogh, Morris, Samotij és Warnke erre ad választ ha H egy klikk, ezzel kiterjesztve Kolaitis, Prömel és Rothschild korábbi eredményét.

Barát és Gerbner sokszorosán összefüggő gráfok élfelbontásait vizsgálta. Konkrétan a következő kérdéssel foglalkoztak, ami Barát és Thomassen sejtése: minden T fához létezik egy k_T természetes szám, amelyre igaz, hogy minden k_T -szeresen él-összefüggő gráf felbontható T -vel izomorf részgráfokra, ha $|E(G)|$ osztható $|E(T)|$ -vel. Megmutatták, hogy elegendő a sejtést páros gráfokra bizonyítani. Ezt tőlük függetlenül bizonyította Thomassen is. JCTB **103** (2013), 504–508. Legyen Y az a fa, melynek fokszámsorozata $(1, 1, 1, 2, 3)$. Megmutatták, hogy ha G legalább 191-szeresen él-összefüggő és élszáma osztható 4-gyel, akkor G -nek van Y -felbontása. Ez volt az első tétel, melyben a kérdéses fa nem út és nem csillag.

Legyen $f_n(H)$ a címkézett H -mentes gráfok száma egy adott n elemű csúcshalmazon. Erdős sejtette, ha H tartalmaz kört, akkor $f_n(H) = 2^{(1+o(1))ex(n,H)}$. Ez aközponti sejtés

mind a mai napig megoldatlan páros gráfok esetén. Még $\log_2 f_n(H)$ nagyságrendje is csupán C_4 és C_6 esetén ismert. Balogh és Samotij megmutatta, ha s és t esetén, ha $2 \leq s \leq t$, akkor $f_n(K_{s,t}) = 2^{O(n^{2-1/s})}$, ami konstans erejéig erős azokban az esetekben, amikor $ex(n, K_{s,t})$ ismert.

Összegmentes halmazok Abel-csoportokban: Balogh József három (társ szerzőkkel írt) cikke foglalkozik ezzel a nagyon központi és intenzíven vizsgált kérdéskörrel. Többek között strukturális leírását adják véletlen halmazok legnagyobb méretű összegmentes részhalmazainak. Ebből korábbi eredmények (Lev, Luczak és Schoen, Sapozhenko, Green és Ruzsa) kiterjesztései adódtak. Cameron és Erdős 1990 sejtését Green és függetlenül Sapozhenko igazolta. Ennek finomított változatát igazolta Alon, Balogh, Morris and Samotij. Ez új módszert kívánt, amely a korábbi eredményekre új bizonyítást is szolgáltat.

Kinnersley és Langston számítógéppel adott kizárt minoros karakterizációt a 2 útszélességű gráfokra. A lista 110 gráfot tartalmazott. Ez a halmaz viszonylag nagy és kevés strukturális információt ad. Barát, Hajnal, Lin és Yang egy más utat követett és a 2 útszélességű gráfokat felépítő blokkokra koncentráltunk. Ezek összeragasztásával megkapható minden 2-szeresen összefüggő és 2-szeresen él-összefüggő gráf ezen osztályban egy rövid és kompakt karakterizációval.

1983-ban Erdős, Hajnal, Sós és Szemerédi bevezette gráfok Ramsey-Turán függvényét és alaperedmények mellett sok problémát vetettek fel ezzel kapcsolatban. Balogh és Lenz, illetve Balogh, Hu és Simonovits ebben a témakörben oldott meg régi problémákat.

Balogh, Morris és Samotij, Independent sets in hypergraphs cikke még csak benyújtás alatt van, de az OTKA kutatásunk csúcseredménye. A cikk uniform halmazrendszerek független halmazainak strukturális leírását adja néhány természetes feltétel mellett. Ezen strukturális leírás korábbi mély és nevezetes tételek egyszerűbb bizonyításához vezetett. Többek között adódott (az eredeti bizonyításokhoz képest meglepően áttekinthető módon) Conlon—Gowers és Schacht ünnepelet eredménye. Új eredményekhez is vezetett ez az erős strukturális eredmény: Szemerédi nevezetes tételének leszámolásos változata adódott. Az eredmény nagy vihart kavart kombinatorikus körökben. A nyári Erdős100 konferencián több meghívott előadó hivatkozott rá: Conlon, Fox, Friedgut, Gowers, Kahn, Rödl, Schacht, Steger.

SZTOCHASZTIKA

Bollobás, Balogh és Morris meghatározta a 2-szomszédság bootstrap perkoláció kritikus valószínűségét és a hiperkockán történő többségi bootstrap perkoláció kritikus valószínűségét. Az általuk kifejlesztett technika statisztikus fizikában is relevánsnak tűnik.

Balogh, Lee és Samotij a klasszikus Corrádi—Hajnal tételt terjesztette ki ritka véletlen gráfokra.

Timár belátta, hogy minden lokálisan véges véletlen gráf, amely a síkba izometria-invariáns eloszlással ágyazott be kiszínezhető öt színnel invariáns, determinisztikus módon (amennyiben néhány technikai feltétel teljesül). A szükséges technikai feltételek automatikusan teljesülnek, ha egy pont-folyamatot veszünk, amelynek majdnem biztosan van szimmetriája, majd ennek a ponthalmaznak vesszük a Voronoi-diagramjának gráfját. Így

eredményünk élesíti Angel, Benjamini, Gurel-Gurevich, Mayerovitch és Peled korábbi eredményét, amely Poisson pont-folyamatokkal foglalkozik és hat színezhetőséget igazol.

Vizsgáltuk a Gilbert modellt, amely véletlen geometriai gráfot konstruál. Igazoltuk, hogy a véletlen geometriai gráf pontosan attól a ponttól kezdve rendelkezik Hamilton-körrel, amikor kétszeresen összefüggővé válik. Ez az eredmény Penrose egy sejtését igazolja. Továbbá beláttuk, hogy a k -szomszédság gráfok esetén alkalmas l -re az l -szeres összefüggő gráfok majdnem mindegyike rendelkezik Hamilton-körrel.

Csaba társszerzőkkel belátta, hogy fix D , α és γ konstansokhoz létezik olyan c konstans, hogy minden $p(n) \geq c/n$ -et teljesítő valószínűségre a $G(n, p)$ véletlen gráf aszimptotikusan majdnem biztosan tartalmaz minden olyan fát, amely maximális foka legfeljebb D , pontszáma $(1 - \alpha)n$, akkor is, ha az élek egy részét eltöröljük úgy, hogy minden csúc körül $1/2 + \gamma$ hányada az éleknek maradjon meg. A bizonyítás a ritka gráfokra vonatkozó regularitási lemmán, továbbá Friedman és Pippenger fák expander gráfokba történő beágyazásáról szóló tételének páros gráfokra vonatkozó változatán múlik.

GEOMETRIA

Erdős egy kérdése, hogy egy konvex helyzetű kiengyensúlyozottan 2-színezett pontthalmazban milyen hosszú nem-metsző, alternáló színű utat találhatunk. A legjobb alsó becslés Pach, Tóth és Valtr egy cikkében van. Egyszerűbb módon, a színezett pontthalmaz egy ügyes kódolásával sikerült megjavítanunk az alsó becslésüket. A legjobb konstrukció szintén a fenti szerzőhármás eredménye (ennek nagyságrendjét optimálisnak sejtik) egy sporadikus konfiguráció. Mészáros Viola több ugyanolyan nagyságrendű konstrukcióosztályt írt le. Ezek analízise, struktúrája lehetővé teszi a probléma mélyebb megértését.

Barát társszerzőkkel vizsgálta az alábbi kombinatorikus kérdést: Egy síkbeli P pontthalmazban üres ötszögnek nevezünk öt pontot, ha szigorúan konvex helyzetűek és a konvex burkukban nincs más P -beli pont. Megmutatták, hogy minden legalább $328\ell^2$ elemű síkbeli véges pontthalmaz tartalmaz üres ötszöget vagy ℓ kollineáris pontot. Ez nagyságrendileg optimális, amit az $\ell - 1$ oldalhosszúságú négyzetrács példája mutatja. A korábbi legjobb korlát dupla exponenciális volt.

ALGORITMUSOK

Az inverz fertőzés probléma alapkérdése a következő: Ha adott egy fertőzési mechanizmus (esetünkben a Domingos-Richardson kaszkád modell), felmerül, kiszámíthatóak-e az élfertőzési valószínűségek egy ismert tanulóhalmaz alapján (feltéve, hogy a valószínűségek néhány paramétertől függhetnek ismeretlen módon)? A valós esetekben (ekkor enm alulhatározott a feladat) lehetséges jó becslés, de a korábban használt grid search rendkívül költséges és csak kisszámú paraméter kezelhető vele. Pluhár és társszerzői egy gradiens alapú módszert vizsgált, ami jelentős gyorsulást ad és pontosság növekedést ad.

Nagy-György és társszerzői cikkükben egy új területet boncolgatnak, amely ládapakolási probléma általánosítása gráfokon. A modellben felírt problémák más ismert kombinatorikai problémák általánosításai.

B. Csaba, T. Plick, A. Shokoufandeh véletlen pontthalmazokra vonatkozó kombinatorikus optimalizálási kérdések (minimális párosítás, minimális feszítőfa, utazó ügynök probléma) optimumának várható értékére ad éles becsléseket.

L. Epstein, Cs. Imreh, A. Levin és Nagy-György Judit egy cikkükben a lapozási probléma új, gyakorlati szempontból érdekes általánosításait vizsgálja és versenyképes online algoritmusokat tervez.

KOMBINATORIKUS JÁTÉKOK

Pluhár társszerzőkkel az úgy nevezett Chooser-Picker (és a Picker-Chooser) játékok matematikai és aktuális bonyolultságának a kérdéseit taglalta. Míg (ezek) a játékok mint nyelvek a PSPACE elemei, NP-nehézséget sikerült belátni róluk. Kiterjesztettük a Hales-Jewett párosítás fogalmát, ennek létezése NP-teljesnek bizonyult. A fogalom alapján megmutattuk, hogy a k -amőbában $k \leq 8$ esetén, illetve a Harary poliómínó játékban a "snaky" ellen nem létezhet párosítási stratégia. Továbbá leírtuk a lehetséges párosítási stratégiákat (két ilyen van) a P_5 , azaz öt egymást követő cella ellen.

Pluhár és Balogh cikkükben a D. Hefetz, M. Krivelevich, M. Stojaković és T. Szabó által bevezetett foksámjátékokat vizsgálunk. Egy gráfjáték táblája K_n , az n pontú teljes gráf élhalmaza. Maker és Breaker felváltva veszik az éleket, és Maker akkor nyer, ha az általa választott részgráf egy eőírt tulajdonságnak eleget tesz. Ebben az esetben egy minimális foksámot el kell érjen Maker minden pontnál. A játék módosított formájában a tábla nem a teljes $E(K_n)$, Maker olyan kevés élet vesz, ami elég a győzelemhez; a mi feladatunk pedig a pontos érték (szükséges élszám) meghatározása. Az ún. pozitív minimális foksám játékban, ahol Maker legalább egy élt akar minden pontnál, sikerült megadni a pontos korlátot: $\lceil 10n/7 \rceil$, ha $n \neq 7k + 2$ és $\lceil 10n/7 \rceil + 1$, ha $n = 7k + 2$. Az alkalmazott módszer a kisütés (discharging method) egy változata.

ELŐADÁSOK (válogatás)

Erdős 100, Budapest konferencián Balogh József meghívott előadó, de az OTKA összes kutatója (az OTKA támogatásból) résztvevő volt.

AMS Spring Central Sectional Meeting, Iowa State University, Ames, IA, USA, April 27-28, 2013: Csaba Béla.

Szemerédi Endre Abel-díjas - tisztelgő előadóülés, Szegedi Egyetem, 2012. május 24.: Hajnal Péter, Csaba Béla.

Workshop on Probabilistic Methods in Graph Theory, University of Birmingham, UK, March 25-29, 2012: Csaba Béla.

Seventh Czech-Slovak International Symposium on Graph Theory, Combinatorics, Algorithms and Applications, Kassa, Szlovákia. 2013. július 7-13.: Barát János: Extremal K_5 -minor-free graphs with fixed girth.

Workshop Cycles and Colourings, Novy Smokovec, Szlovákia. 2013. szeptember 8-13.: Barát János: List colouring, minimum degree, minors and girth.

Columbia University, New York, USA, 2012 Discrete Math Seminar: József Balogh: Independent sets in hypergraphs.

NEMZETKÖZI KAPCSOLATOK

Cikkeink társszerzőségei rámutatnak, hogy a szegedi csoporton belül is igen aktív együttműködések történtek, és szinte a világ minden tája reprezentált cikkeink társszerzői által. Az ehhez szükséges utazásokat OTKA támogatással tudtuk elérni.

SZEMINÁRIUM

A szegedi kombinatorika szeminárium munkája a kutatás mellett a fiatal diákok érdeklődését is felkelti. Szakdolgozatok mellett Mészáros Viola, Mester Péter PhD fokozatot szerzett, két további PhD értekezés is születendőben van és további PhD hallgatók kutatnak kombinatorika témában. A szeminárium honlapja: <http://www.math.u-szeged.hu/~hajnal/seminars/kombszem/kombszem.htm>