DIFFERENCIÁLEGYENLETEK KVALITATÍV ELMÉLETE ALKALMAZÁSOKKAL

MAT: 75517 kutatás zárójelentése

A pályázat célja másodrendû közönséges differenciálegyenletek és funkcionál-differenciálegyenletek vizsgálata volt. Ezek az egyenletek gyakran modelleznek fizikai, kémiai, biológiai, közgazdasági jelenségeket. A vizsgálatukat elsõsorban az alkalmazások motiválják.

Kutatásaink eredményeként 33 dolgozatot publikáltunk, további 4 el van fogadva közlésre, hatot benyújtottunk, és készült 3 szoftvercsomag.

A kutatómunkában 6 PhD hallgató is részt vett, közülük négyen a projekt indulása után csatlakoztak a pályázathoz. Ketten már PhD fokozatot szereztek ([47,48]), további kettõ fokozatszerzés várható 2013-ra.

1. Másodrendû közönséges differenciálegyenletek

A másodrendû közönséges differenciálegyenletekre elért eredmények ([3,4,11,19,41,42]) közül kiemelendõ a

S. Csörgõ, L. Hatvani: Stability properties of solutions of linear second order differential equations with random coefficients, J. Differential Equations 248(2010), 21-49.

dolgozat, amely az

$$x'' + a^2(t)x = 0 \qquad (t \geq 0)$$

lineáris, nemautonóm egyenletet (Meissner egyenlet) vizsgálja. Az $x = 0$ egyensúlyi helyzet stabilitására és instabilitására ad elegendõ feltételeket, amikor az $a(t)$ egy lépcsõs függvény. Csak annyi a megszorítás az $a(t)$-re, hogy az egymást követõ ugrások közötti idõintervallumok független, pozitív (nem feltétlenül azonos eloszlású) véletlen változók. Az eredmények illusztrálására megadunk egy következményt:

Legyen az $a^2(t)$ együttható egy lépcsõs függvény a következõ tulajdonsággal:

$$a(t) = a_k \qquad (t_{k-1} \leq t < t_k,\ k \in \mathbb{N}); \quad a_k \nearrow \infty.$$

Tegyük fel, hogy a $(t_k - t_{k-1})_{k=1}^{\infty}$ *differenciák sorozata független azonos eloszlású véletlen változók, amelyek karakterisztikus függvénye* ϕ. *Ha*

$$\limsup_{|s|\to\infty} |\phi(s)| < 1,$$

akkor tetszõleges (a_k) *sorozat esetén az egyenlet bármely* x *megoldására*

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0 \qquad \textit{majdnem biztosan.}$$

Az instabilitási tétel a véletlen hintázásra alkalmazható. A sztochasztikus paraméter-rezonanciára is adódik feltétel [4].

A [19] dolgozat az

$$x''|x'|^{n-1} + q(t)|x|^{n-1}x = 0, \qquad 1 \leq n \in \mathbb{R}$$

egyenlet $x = 0$ megoldásának aszimptotikus stabilitására ad elegendõ feltételeket. A bizonyítás módszere alkalmazható 2-dimenziós nem-autonóm differenciaegyenletekre is. Az alkalmazás Elbert egy eredményének élesített változatára ad új bizonyítást.

Mechanikai rendszerek kaotikusságának vizsgála tovább folytatódott, de itt csak rész-eredmények születtek.

2. Funkcionál-differenciálegyenletek

A nagyobb terjedelmû

Krisztin, T., Vas, G., Large-amplitude periodic solutions for a differential equation with delayed positive feedback, Journal of Dynamics and Differential Equations 23 (2011) 4, 727–790.

dolgozat funkcionál-differenciálegyenleteket vizsgál monoton pozitív visszacsatolás esetén. Megmutatja, hogy a globális attraktor szerkezete bonyolultabb lehet a pontonkénti rendezésben szomszédos stabil egyensúlyi helyzetek között található orsó-szerû alakzatok uniójánál: nagy amplitúdójú (nem szomszédos stabil egyensúlyi helyzetek között elhelyezkedõ) periodikus pályákat konstruál lépcsõs függvényhez "közeli" visszacsatolási függvényekre. Bizonyos nemlinearitásokra pontosan két nagy amplitúdójú periodikus megoldás létezik. A periodikus pályák instabil halmazainak leírásával teljes képet ad a globális attraktor orsószerû alakzatokon kívüli szerkezetérõl, az összekötõ pályákról. Ez a dolgozat nagy érdeklõdést váltott ki bizonyos egydimenziós parabolikus egyenletekkel foglalkozó kutatók körében (B. Fiedler, C. Rocha, A. Carvalho), mert hasonlóságot mutat a nevezetes Chafee–Infante eredményhez. Ezért valamivel részletesebben ismertetjük. Tekintsük az

$$\dot{x}(t) = -\mu x(t) + f(x(t-1))$$

egyenletet, ahol $\mu \geq 0$ és $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ síma függvény. Sok minden ismert a generált szemidinamikai rendszer globális attraktoráról. Egy diszkrét Ljapunov-függvény — mint elsõdleges technikai eszköz — alkalmazása mély, végtelen dimenziós dinamikai rendszerek eszközeivel teszi lehetõvé pl. Poincar$\acute{e}-$Bendixson típusú tétel igazolását (Mallet-Paret, Sell), a globális attraktor Morse-felbontását (McCord, Mischaikow). Bizonyos nemlinearitásokra a globális attraktorról teljes kép ismert (Krisztin, Walther, Wu). De sok esetben nem ez a helyzet. Tegyük fel, hogy $\mu > 0$, $f'(\xi) > 0$, $\xi \in \mathbb{R}$, és

$$\xi_{-2} < \xi_{-1} < \xi_0 = 0 < \xi_1 < \xi_2$$

öt egymás után következõ zéróhelye az $\xi \mapsto \mu\xi + f(\xi)$ függvénynek úgy, hogy $f'(\xi_j) < \mu < f'(\xi_k)$, ha $j \in \{-2, 0, 2\}$ és $k \in \{-1, 1\}$. Ekkor a $C = C([-1, 0], \mathbb{R})$ fázistér $C_{j,k} = \{\varphi : \ \xi_j \leq \varphi(s) \leq \xi_k, \ -1 \leq s \leq 0\}$ részhalmazai, $j \in \{-2, 0\}$, $k \in \{0, 2\}$, pozitív invariánsak a generált F dinamikai rendszerre. Az F dinamikai rendszer $F|_{[0\infty)\times C_{-2,0}}$ és $F|_{[0\infty)\times C_{0,2}}$ a globális attraktorait, azaz a $\mathcal{A}_{-2,0}$ és $\mathcal{A}_{0,2}$ halmazokat (legalábbis részben) leírtuk korábban. Az $\mathcal{A}_{-2,0}$ és $\mathcal{A}_{0,2}$ halmazok orsószerû struktúrájúak. A dolgozat azt a problémát vizsgálja, hogy vajon az F dinamikai rendszer $\mathcal{A}$ globális attraktorára a

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{-2,0} \cup \mathcal{A}_{0,2}$$

egyenlõség fennáll-e. A fõ eredmény az, hogy $\mathcal{A}$ bonyolultabb lehet annál, amit a fenti egyenlõség mond. Megadunk olyan egyenleteket, ahol az $\mathcal{A} \setminus (\mathcal{A}_{-2,0} \cup \mathcal{A}_{0,2})$ halmaz periodikus pályákat tartalmaz. Leírjuk az $\mathcal{A} \setminus (\mathcal{A}_{-2,0} \cup \mathcal{A}_{0,2})$ halmaz szerkezetét.

A benyújtott [38] cikk a fenti egyenlet egy speciális esetével, az ún. Wright-egyenlettel foglalkozik, azaz

$$x'(t) = -\alpha(e^{x(t-1)} - 1),$$

ahol $\alpha > 0$ paraméter. Erre az egyenletre fogalmazta meg 1955-ben E.M. Wright azt a nevezetes sejtést, hogy minden megoldás 0-hoz tart, ha $\alpha < \pi/2$, és ezt be is bizonyította $\alpha \leq 3/2$ esetén. Analitikus és megbízható numerikus technikák kombinálásával megmutattuk, hogy a sejtés igaz $\alpha \in [1.5, 1.5706]$ esetén is (vesd össze a $\pi/2 = 1.570796...$ értékkel). A kifejleszett technikák várhatóan más problémákra is alkalmazhatók lesznek. Egy hasonló módszert alkalmazva — végtelen helyett azonban 2 dimenzióban — a [34] dolgozatban S. Levin és R. May egy 1976-ból származó, a Ricker-egyenletre vonatkozó sejtését bizonyítottuk be.

A [23] cikk becslést ad a fundamentális megoldás integráljára késleltetett lineáris autonóm differenciálegyenletek esetén, majd alkalmazza az eredményt perturbált egyenletek stabilitási tulajdonságainak vizsgálatában. Továbbá olyan becsléseket tartalmaz, amelyek a Wright-egyenletre vonatkozó sejtés további vizsgálatához szükségesek.

A [15] publikáció igazolja, hogy bizonyos negatív visszacsatolású késleltetett differenciálegyenletek esetén választható olyan lokálisan Lipschitz-folytonos visszacsatolási függvény, hogy az egyenletnek végtelen sok különbözõ, lassan oszcilláló periodikus megoldása legyen. A visszacsatolási függvény differenciálhatósága esetén ezek a periodikus pályák stabilak és hiperbolikusak.

A [13] dolgozat $x'(t) = -\mu x(t) + f(x(t-r))$ alakú egyenletek periódusfüggvényét vizsgálja, ahol $\mu > 0,\ r > 0$, f pedig egy folytonosan differenciálható, szigorúan monoton, páratlan függvény. Megmutattuk, hogy a periódusfüggvény monoton növekvõ (r függvényében) és Lipschitz-folytonos, 2 konstanssal, majd mindezt felhasználva szükséges és elegendõ feltételt adtunk egy gyûrûszerû rendszer periodikus megoldásának létezésére és egyértelmûségére bizonyos frekvencia-feltételek mellett. A [32] cikk a nemsíma $f(x) = (|x+1| - |x-1|)/2$ speciális esetet viszgálja, amely CNN-hálózatok vizsgálatában fordul elõ. Szükséges és elegendõ feltételt ad periodikus megoldások létezésére és egyértelmûségére egyes frekvencia tartományokban, továbbá a periódusfüggvény vizsgálatával kiterjeszti a létezésre és egyértelmûségre vonatkozó tételeket a fentivel analóg, gyûrûszerû késleltetett differenciál-egyenletrendszerre bizonyos frekvencia tartományokban.

Nem-monoton viszacsatolási f függvény esetén vizsgálja a fenti egyenletet a [22] dolgozat, és az ún. "bubbling" jelenségre ad magyarázatot lokális és globális bifurkációs eredmények segítségével. Nem-monoton visszacsatolási függvény fordul elõ az [1,10] cikkekben is.

A fenti egyenletek nem-autonóm (speciálisan periodikus) verziójával is foglalkoztunk. A nem-autonóm dinamika eszközeit lehet alkalmazni. Speciálisan az ún. "pullback attractor" fogalma használható. Egy elõkészületben lévõ dolgozat azt vizsgálja, hogy a pullback attraktor gradiens-szerû struktúrája megmarad-e a nem-autonóm esetben.

Állapotfüggõ késleltetésû egyenletekre több elõkészületben lévõ dolgozat van.

3. Alkalmazások

Egy genetikai modell dinamikáját vizsgálja az [5] dolgozat.

A [9] cikkben vizsgált rendszer a Tanganyika-tóban élõ növényevõ és ragadozó halak eloszlását modellezi. Az egyenletnek nincs egyensúlyi helyzete, de a határegyenletnek van. A cikkben megmutatjuk, hogy ez az egyensúlyi helyzet globálisan eventuálisan egyenletesen aszimptotikusan stabil pontja az eredeti egyenletnek. A bizonyítás során a linearizációt, a határegyenletek módszerét és Ljapunov direkt módszerét használjuk.

[26]-ben egy késleltetéses reakció-diffúzió rendszert vizsgálunk, ami egy vírus térbeli terjedését írja le egy baktériumpopulációban. A késleltetés explicit módon a vírusfertõzés fix idejû látens periódusának felel meg. A rendszernek három változója van, ami a vírusok, a baktériumok illetve a fertõzött baktériumok térbeli sûrûségét adja meg. A fertõzõdés után a baktérium a fertõzött osztályba kerül, majd τ idõ elteltével elpusztul, és egyben nagy mennyiségû vírust bocsét ki (burst), ennek a folyamatnak a neve lízis. Egy adott térbeli helyen a kumulatív víruskitettséget mint változót tekintve (ami a vírussûrûség idõbeli integrálja az adott helyen), a rendszer egy skaláris parabolikus egyenletre redukálható (az idõkésleltetés továbbra is jelen van). Megadjuk a lehetséges aszimptotikus terjedési sebességeket és haladó hullám megoldások létezését igazoljuk. Megmutatjuk azt az érdekes jelenséget, hogy bizonyos paramétertartományban a lineáris determináció elve sérül.

A [29,33] cikkekben egy klasszikus kereslet-kínálati modellt vizsgálunk, ahol a kereslet azonnal reagál az árváltozásra, míg a kínálat bizonyos késéssel teszi ezt, így egy késleltetéses differenciálegyenletet kapunk, aminek egy természetes határesete egy diszkrét dinamikai rendszer. [30]-ban egyenletes korlátokat adunk a fluktuáló árra a késleltetés függvényében, és elégséges feltételt (a késleltetéstõl függõen) az egyensúlyi ár globális stabilitásra . [33]-ben a diszkrét rendszer dinamikájának részletes analízisét elvégezve és ezt felhasználva új globális stabilitási eredményeket bizonyítunk a folytonos rendszerre, megadva a legélesebb abszolút (késleltetéstõl független) globális stabilitási feltételt, az instabil esetben pedig megadjuk a fluktuáló ár lehetséges amplitúdóit, ami abszolút értelemben a lehetõ legélesebb korlát.

[30]-ban egy SEIR modellt tekintettünk növekvõ populációban, konstans látens periódussal. A korlátosság érdekében áttértünk proporcionális változókra. A modell érdekessége, hogy már a nemtriviális egyensúlyi helyzet létezése és unicitása sem triviális kérdés (ez azt jelenti az eredeti modellben, hogy a fertõzõk aránya állandó marad-e). A parametrikus reprezentáció módszerével (másik neve envelope method) megoldottuk ezt a problémát. Tudomásunk szerint ez az elsõ alkalmazása ennek a módszernek ilyen típusú modellekre. Emellett elvégeztük a triviális egyensúly stabilitásvizsgálatát és kijavítottunk egy korábbi téves bizonyítást az irodalomban a fertõzött részpopuláció arányának perzisztenciájára.

Röst Gergely a 2009-es H1N1 járvány idején az Országos Epidemiológiai Központtal kötött írásbeli megállapodás alapján analíziseket és elõrejelzéseket készített a heti rendszerességgel kapott részletes influenzaadatok alapján. Ehhez egy új korstrukturált modellt dolgozott ki. Az elméleti eredményeket [18]-ben publikálta doktorranduszával, Knipl Diánával. A model egy 50-dimenziós nemautonóm nemlineáris rendszer. Különbözõ korspecifikus oltási menetrendeket hasonlítottak össze egy olyan szituációban, amikor az oltási kampány párhuzamosan fut a járvány kitörésével. Ekkor annak a kéthetes késleltetésnek is komoly hatása van, ami az oldás beadása és az immunitás kialakulása között van. A legjobb stratégiának az bizonyult, amikor az egyes korcsoportokat teljes kontaktszámuk szerinti csökkenõ sorrendben vakcinálják. Ez még azoknak a korcsoportoknak is kedvezõbb lehet, akik hátrébb kerülnek a prioritási sorban. Egy ügyes szisztémával akár 10%-kal is csökkenthetõ a fertõzöttek teljes száma, ugyanannyi vakcina felhasználása mellett. Az [19] dolgozat a Math. Biosci. Eng. folyóirat második legolvasottabb cikke volt hosszú idõn át.

A modellt a valós magyarországi adatokra és vakcinafelhasználásra is alkalmazták, és folyamatosan informálták az Országos Tisztifõorvos epidemiológus tanácsadóját. A modell több szempontból is olyan pontos predikciókat adott, amik a matematikai modell nélkül nem voltak elõreláthatók.

4. Numerikus eredmények

Különbözõ numerikus eljárásokat, algoritmusokat, szimulációs technikákat dolgozott ki Karsai János ([45,46,47) differenciálegyenletes és differenciaegyenletes modellek vizsgálatára. A [12] cikk dinamikus rendszerek attraktorainak és azok medencéinek ábrázolására szolgáló új algoritmus leírását tartalmazza.

Az elõkészületben lévõ [M. Polner, J.J.W. van der Vegt, A Hamiltonian structure-preserving vorticity-dilatation formulation of the compressible Euler equations] cikk az Euler egyenletek egy új Hamiltoni megfogalmazásával foglalkozik. Az egyenleteket átírják egy úgynevezett örvényesség és dilatáció alakra, amelynek fontos eleme a Hodge-felbontás alkalmazása korlátos tartományokon. Ez a megközelítés, a külsõ kalkulus alapjait is szolgáló, Hilbert komplexusok fogalmára alapszik. Fontos, hogy az egyenleteknek az új változókban is Hamiltoni struktúrájuk van. Ennek a legfontosabb lépése a Poisson zárójel helyes megfogalmazása. A dolgozat egy hosszú távú célkitûzés felé vezet, amelynek célja, hogy az Euler egyenletek megoldására olyan stabil numerikus módszert konstruáljunk, amely megõrzi a rendszer Hamilton szerkezetét a diszkretizáció szintjén is. Azon diszkretizációs módszerek, amelyek a Hamilton struktúra megõrzésére alkalmasak, általában kiemelkedõen jó stabilitási és pontossági tulajdonságokkal rendelkeznek. Ilyen módon elérhetõ, hogy a kialakult örvények ne terjedjenek szét a numerikus módszer disszipatív tulajdonságai miatt. Ehhez jó kiindulási pont a dolgozatban leírt Hamiltoni szerkezet az örvényesség és dilatáció változókban.

References

[1] E. Liz, G. Röst: On the Global Attractor of Delay Differential Equations with Unimodal Feedback, Discrete and Continuous Dynamical Systems, 24:(4) 1215-1224, 2009

[2] G. Vas: Asymptotic constancy and periodicity for a single neuron model with delay, Nonlinear Analysis, vol. 71, 2268-2277, 2009

[3] L. Hatvani: Stochastic parametric resonance in a linear oscillator at swuare-wave modulation, Problems of Analytical Mechanics and Stability Theory (Eds. F.L. Chernousko, A.V. Karapetyan, V.V. Kozlov, N.N. Krasovskii, V.N. Tkhai, S.N. Vasil'ev), Fzmatlit, Moscow, 2009

[4] L. Hatvani: On the critical values of parametric resonance in Meissner's equation by the method of difference equations, Electronic J. Qualitative Theory of Diff. Equations, Spec. Ed. I, No. 1, 1-10, 2009

[5] L. Hatvani, F. Toókos, G. Tusnády: A mutation-selection-recombination model in population genetics, Dynam. Systems Appl. 18(2009), 335-362, 2009

[6] Moghadas SM; Bowman CS,; Röst G; Fisman DN; Wu J: Post-exposure prophylaxis during pandemic outbreaks, BMC MEDICINE 7: 73doi:10.1186/1741-7015-7-73 p. 1.(2009), 2009

[7] S.M. Moghadas, C.S. Bowman, G. Röst, D.N. Fisman, J. Wu: Post-exposure prophylaxis during pandemic, BMC Medicine 2009, 7:73 doi:10.1186/1741-7015-7-73, 2009

[8] T. Krisztin: On the fundamental solution of a linear delay differential equation, Int. J. Qualitative Theory of Differential Equations and Appl. 3(2009), 1-7, 2009

[9] A. Dénes, L. Hatvani, L.L. Stachó: Eventual stability properties in a nonautonomous model of population dynamics, Nonlinear Anal. 73 (2010), 650-659., 2010

[10] E. Liz, G. Röst: Dichotomy results for delay differential equations with negative, Nonlinear Anal. RWA, 2010 doi:10.1016/j.nonrwa.2009.02.030, 2010

[11] S. Csörgõ, L. Hatvani: Stability properties of solutions of linear second order differential equations with random coefficients, J. Differential Equations 248(2010), 21-49., 2010

[12] A. Dénes, G. Makay: Attractors and basins of dynamical systems, E. J. Qualitative Theory of Diff. Equ. 20 (2011), 1-11, 2011

[13] Á. Garab, T. Krisztin: The period function of a delay differential equation and an application,, Periodica Mathematica Hungarica 63 (2011), 173-190, 2011

[14] D. Knipl, G. Röst: Influenza models with Wolfram Mathematica, Interesting Mathematical Problems in Sciences and Everyday Life, Chapter 4, pp 1-24 (Eds: J. Karsai, R. Vajda), Szeged - 2011 - Novi Sad, 2011

[15] G. Vas: Infinite number of stable periodic solutions for an equation with negative feedback,, E. J. Qualitative Theory of Diff. Equ., No. 18 (2011), pp. 1-20., 2011

[16] J. Karsai: Investigations of Impulsive Systems with Mathematica, Interesting Mathematical Problems in Sciences and Everyday Life, 27 pages (Eds: J. Karsai, R. Vajda), Szeged - 2011 - Novi Sad, 2011, 2011

[17] J. Terjéki, M. Bartha: On the convergence of solutions of nonautonomous functional differential equations, E. J. Qualitative Theory of Diff. Equ., Proc. 9th Coll.QTDE, 2011, No. 1 1-10, 2011

[18] Knipl D, Röst G.: Modelling the strategies for age specific vaccination scheduling during influenza pandemic outbreaks, Math. Biosci. Eng. 8(1), 123-139 (2011), 2011

[19] L. Székely, L. Hatvani: Asymptotic stability of two dimensional systems of linear difference equations and of second order half-linear differential equations with step function coefficients, E. J. Qualitative Theory of Diff. Equ., No. 38 (2011), pp. 1-17., 2011

[20] Röst G: SEI model with varying infectivity and mortality, MATHEMATICS IN SCIENCE AND TECHNOLOGY: Mathematical Methods, Models and Algorithms in Science and Technology, Proceedings of the Satellite Conference of ICM 2010 Konferen, 2011

[21] Röst G: On an approximate method for the delay logistic equation COMMUNICATIONS IN NONLINEAR SCIENCE AND NUMERICAL SIMULATION 16:(9) pp. 3470-3474.(2011), COMMUNICATIONS IN NONLINEAR SCIENCE AND NUMERICAL SIMULATION 16:(9) pp. 3470-3474., 2011

[22] T. Krisztin, E. Liz: Bubbles for a Class of Delay Differential Equations, Qualitative Theory of Dynamical Systems 10 (2011), 169-196, 2011

[23] T. Krisztin, G. Vas: On the fundamental solution of linear delay differential equations with multiple delays, E. J. Qualitative Theory of Diff. Equ., 36 (2011), 1-28, 2011

[24] T. Krisztin, G. Vas: Large-amplitude periodic solutions for a differential equation with delayed positive feedback, Journal of Dynamics and Differential Equations 23 (2011), 727–790., 2011

[25] Dénes A; Röst G: Structure of the global attractors in a model for ectoparasite borne diseases, BIOMATH 1:(1) pp. Article ID: 1209256-1–5., 2012

[26] Jones DA; Smith HL; Thieme HR; Röst G: Spread of Phage Infection of Bacteria in a Petri Dish, SIAM JOURNAL ON APPLIED MATHEMATICS 72:(2) pp. 670-688., 2012

[27] Knipl DH; Röst G: Multiregional SIR Model with Infection during Transportation, BIOMATH 1:(1) pp. Article ID: 1209255-1–7., 2012

[28] Liu M; Röst G: Dynamics of an SIS Model on Homogeneous Networks with Delayed Reduction of Contact Numbers, BIOMATH 1:(2) pp. Article ID: 1210045-1-7., 2012

[29] Röst G: Global convergence and uniform bounds of fluctuating prices in a single commodity market model of Bélair and Mackey, ELECTRONIC JOURNAL OF QUALITATIVE THEORY OF DIFFERENTIAL EQUATIONS 2012:(26) pp. 1-9., 2012

[30] Röst G; Huang ShY; Székely L: On a SEIR Epidemic Model with Delay, DYNAMIC SYSTEMS AND APPLICATIONS 21: pp. 33-48, 2012

[31] Dénes A; Kevei P; Nishiura H; Röst G: Risk of infectious disease outbreaks by imported cases with application to the European Football Championship 2012, INTERNATIONAL JOURNAL OF STOCHASTIC ANALYSIS 2013: p. 1.(2013) online http://www.hindawi.com/journals/ijsa/aip/576381/

[32] Garab Á: Unique periodic orbits of a delay differentail equation with piecewise linear feedback function, Discrete and Continuous Dynamical Systems, 33(6):2236-2387, 2013.

[33] Liz E,Röst G: Global dynamics in a commodity market model, JOURNAL OF MATHEMATICAL ANALYSIS AND APPLICATIONS 398:(2) pp. 707-714. 2013.

Elfogadott dolgozatok:

[34] F. A. Bartha, Á. Garab, T. Krisztin, Local stability implies global stability for the 2-dimensional Ricker map, Journal of Difference Equations and Applications, elfogadva.

[35] Gergely Rost; Maoxing Liu; Gabriella Vas, SIS model on homogeneous networks with threshold type delayed contact reduction, Computers and Mathematics with Applications

[36] Méri Á, Karsai J, Investigation of the Spatio-Temporal development of cuscuta Species, to appear in Polish Journal of Ecology.

[37] Hulmán Á, Faerch K, Vistisen D, Karsai J, Nyári TA, Tabák AG, Brunner EJ, Kivimäki M, Witte DR, Effect of time of day and fasting duration on measures of glycaemia: analysis from the Whitehall II study, Diabetologia (2012), Online first: DOI 10.1007/s00125-012-2770-3 (IF: 6.814), http://link.springer.com/article/10.1007.

Benyújtott dolgozatok:

[38] Balázs Bánhelyi, Tibor Csendes, Tibor Krisztin, and Arnold: Neumaier:Global attractivity of the zero solution for Wright's equation.

[39] Dénes A., Röst G., Global dynamics for the spread of ectoparasite-borne diseases.

[40] Dénes A., Röst G., Global dynamics of a compartmental system modeling ectoparasite-borne diseases.

[41] Knipl DH, Fundamental properties of differential equations with dynamically defined delayed feedback.

[42] Hatvani L., An elementary method for the study of Meissner's equation and its application to proving the Oscillation Theorem.

[43] L. Csizmadia, L. Hatvani, An extension of the Levi-Weckesser method to the stabilization of the inverted pendulum under gravity.

Szofverek:

[44] Karsai J, Méri Á, Mathematica packages to study stochastic cellular automata for multi-species interactions, 2012.

[45] Karsai J., Computer-aided study of mathematical models, CD-ROM, Univ. of Szeged, 2008, revised in 2012.

[46] Karsai J., Mathematical and visualizaton packages: Mathematica, CD-ROM, Univ. of Szeged, 2008, revised in 2012.

PhD értekezések:

[47] Dénes Attila, Populációdinamikai rendszerek elméleti és számítógépes stabilitásvizsgálata, Szeged, 2011. Témavezetõ: Hatvani László.

[48] Vas Gabriella, Periodic Orbits and Global Dynamics for Delay Differential Equations, Szeged, 2011. Témavezetõ: Krisztin Tibor.