

# Záró beszámoló OTKA pályázathoz

## OTKA pályázat adatai

Cím	Korrelációs függvények és véges méret effektusok kétdimenziós kvantumtérelméletekben
Azonosító	K75172
Témavezető	Takács Gábor
Futamidő	2008. október 1 – 2012. október 31.
Támogatás	6.35 MFt

## Tartalomjegyzék

I. Az eredeti kutatási célok rövid összefoglalása.....	1
II. Eredmények.....	2
1. NRG-TCSA módszer kifejlesztése.....	2
2. Form faktorok véges térfogatban: kiterjesztés nemdiagonális elméletekre.....	2
3. Véges hőmérsékletű korrelátorok spektrális kifejtése.....	3
4. Nemintegrálható kvantumtérelméletek.....	3
5. Peremes elméletek.....	3
6. Exponenciális véges méret effektusok.....	4
7. $OSp(2 2)$ Gross-Neveu és szigma modellek .....	4
8. Aszimptotikus szóráselmélet a kvantum Potts spinláncban .....	4
III. Összefoglalás.....	5
1. Összevetés a kitűzött célokkal.....	5
2. Eltérések a kitűzött munkatervtől.....	5
3. Kitekintés.....	5
IV. Az OTKA támogatásával készült közlemények jegyzéke.....	6
V. Egyéb releváns közlemények jegyzéke.....	7

## I. Az eredeti kutatási célok rövid összefoglalása

A pályázatban megfogalmazott fő célok az alábbiak voltak:

1. *A peremes form faktor bootstrap továbbfejlesztése*

Elsődleges cél a bootstrap egyenletekkel előállított form faktorok azonosítása volt a megfelelő lokális operátorokkal.

2. *Véges hőmérsékletű korrelátorok kiszámítása a véges térfogatú form faktor formalizmus segítségével*

A témavezető által korábban kifejlesztett véges térfogatú form faktor formalizmus alkalmazásával

véges hőmérsékletű korrelációs függvények konstrukciója. Ezt a kondenzált anyagok fizikájára való alkalmazhatóság motiválta.

### 3. A fentiek kiterjesztése peremes elméletekre

Itt az elsődleges cél az volt, hogy a peremes entrópia függvény kiszámítására alkalmas módszert állítsunk fel. Eredetileg ezt a peremes form faktor formalizmus tömegrés nélküli elméletekre történő általánosításával, és a véges hőmérsékletű korrelátorok kifejtési módszerének peremes operátorokra történő alkalmazásával terveztük.

### 4. Exponenciális véges méret korrekciók vizsgálata

Az eredetileg kifejlesztett véges térfogatú form faktor formalizmus nem írja le a térfogat növekedésével exponenciálisan csökkenő korrekciókat. Ezek vizsgálata, és térelméleti alkalmazása volt a cél.

A fenti célok eléréséhez az alábbi közbenső célokat is megfogalmaztuk:

### 5. TCSA módszer továbbfejlesztése az elméleti eredmények numerikus eredménye céljából

Nyilvánvalóvá vált, hogy a módszer továbbfejlesztése céljából szükséges volt az alkalmazott csonkolt konform állapotter megközelítés (truncated conformal space approach, TCSA) további fejlesztése, elsősorban azért, mert a munka szempontjából fontos sine-Gordon elméletben nem adott kellő pontosságú eredményeket.

### 6. A peremes form faktor formalizmus általánosítása tömegrés nélküli elméletekre

Ez a feladat a peremes entrópia függvény konstrukciójának eredeti elképzeléséhez volt szükséges.

## II. Eredmények

### 1. NRG-TCSA módszer kifejlesztése

A munka során a TCSA módszert folyamatosan továbbfejlesztettük. Ennek betetőzéseként (R.M. Konik korábbi munkája nyomán) implementáltuk a numerikus renormálási csoport módszert [14], és ezzel lehetővé vált az a pontosság, amivel az elméleti sejtéseink szükséges numerikus igazolását biztosítani tudtuk. Ezzel a módszerrel elértük azt a tartományt, amiben már a perturbatív renormálási csoport segítségével végtelen levágásra tudjuk extrapolálni az eredményeket.

### 2. Form faktorok véges térfogatban: kiterjesztés nemdiagonális elméletekre

A korábban kifejlesztett formalizmust sikerült kiterjeszteni nemdiagonális térelméletekre. Ez először Fehér Györggyel együtt a sine-Gordon lélegzőire [7], majd Pálmai Tamással kiegészülve több-szoliton állapotokra is sikerült [12]. Az utóbbihoz szükséges volt a sine-Gordon szoliton form faktorok irodalomból ismert, integrálreprezentációval megadott alakjának numerikus kiszámítása, amit egy újonnan kifejlesztett regularizációs eljárással Pálmai Tamás oldott meg [16].

Legutóbbi eredményünkkel pedig sikerült egy sejtést megfogalmazni a nemösszefüggő járulékokat tartalmazó mátrixelemek leírására [14]. Ennek jelentősége, hogy ezzel már teljesen általános integrálható térelméletekben ismerjük a form faktorok összes, a térfogattal hatványszerűen lecsengő

korrekcióját, így az ezt alkalmazó módszerek, mint pl. az alábbiakban érintett eljárás a véges hőmérsékletű korrelátorok kiszámítására, teljesen általános integrálható térelméletekre használhatók.

### **3. Véges hőmérsékletű korrelátorok spektrális kifejtése**

A véges térfogatú form faktor formalizmusból kiindulva, az egy-részecske állapotok járulékanak kiszámítását már Pozsgay Balázs PhD értekezése [15] tartalmazta, azonban a magasabb korrekciók és a szisztematikus kifejtés megalkotása súlyos technikai nehézségekbe ütközött: sokáig nem volt világos, miként lehet analitikusan elvégezni a véges térfogatú állapotokra vonatkozó spektrális összeget.

Ezt 2010-ben sikerült megoldani [2], mégpedig a többdimenziós reziduum formula alkalmazásával, azonban a végleges formalizmust és az ebből adódó sorfejtést csak 2012-ben sikerült megalkotni [13]. A legutóbbi munkában már az eredmény részletes igazolása szerepel, mégpedig egyrészt numerikus háttérszámításokkal, másrészt pedig olyan fontos elméleti követelmények, mint a Kubo-Martin-Schwinger reláció és a klaszter tulajdonság ellenőrzésével. Mivel csak mostanra hárultak el az elméleti akadályok a formalizmus alkalmazása előtt, így annak alkalmazása, valamint a célul kitűzött egyszerűsítése a későbbi kutatásokra marad.

A módszer nemcsak integrálható térelméletekre alkalmazható: a kétrészecske állapotokig bezárólag, [2,13]-ban kiszámolt sorfejtés nemintegrálható modellekben is alkalmazható mindazon tartományokban, ahol a domináns energia skála nem éri el a rugalmatlan folyamatok küszöbét.

### **4. Nemintegrálható kvantumtérelméletek**

G. Mussardo-val sikerült szisztematikus módszert adni nemintegrálható kvantumtérelméletek vákuum szerkezetének, effektív potenciáljának és topologikus gerjesztéseinek kvalitatív meghatározására [1]. A módszer a modelleknek egy ultraibolya fixpont releváns perturbációjaként történő megfogalmazásra alapul, és lényeges eleme a véges méret effektusok analízisében használt módszerek (konform perturbációszámítás, TCSA) segítségével levonható következtetések felhasználása.

A véges térfogatú form faktor formalizmussal sikerült kiterjeszteni a Delfino, Mussardo és Simonetti által kifejlesztett form faktor perturbációszámítás (FFPT) érvényességét. Az FFPT segítségével a nemintegrálható térelméletek az integrálhatóság sértését kifejező csatolásban perturbatíván vizsgálható. Ennek alapvető jelentősége, hogy egyéb tekintetben viszont az analízis nemperturbatív, így módot ad pl. szolitonok dinamikájának elemzésére. Azonban eredeti formájában a módszer csak első rendig működött; másodrendben olyan divergenciák léptek fel, amiknek kezelésére semmilyen lehetőség nem látszott. A véges térfogatú form faktor formalizmussal sikerült másodrendre (és elvileg magasabb rendre is) kiterjeszteni; ez különösen akkor fontos, ha (mint az alkalmazások szempontjából fontos kétfrekvenciás sine-Gordon modellben) az elsőrendű korrekció eltűnik. A módszer hatékonyságát numerikus adatokkal történő összehasonlítással demonstráltuk [4].

### **5. Peremes elméletek**

Ugyancsak a véges térfogatú form faktor formalizmussal sikerült lokális bulk operátorok várható értékeinek kiszámítása peremes térelméletekben [5]; ez azért különösen érdekes, mert az ilyen várható értékek helyfüggőek. Az eredmények várhatóan alkalmazhatóak egyszemélyes rendszerekben a peremek okozta effektusok modellezésére, illetve az ún. „quantum quench” folyamatok megértésében.

Sikerült a peremes sine-Gordon modell lélegző form faktorait megalkotni, és helyességüket, valamint az operátor azonosítás helytállóságát a TCSA módszerrel igazolni [10].

A peremes entrópiafüggvények konstrukcióját az eredeti elképzeléstől eltérő módszerrel oldottuk meg [11]. Ebben részben az is közrejátszott, hogy Szóts Miklós doktorandusz nem végezte el a kiadott feladatokat (így képzése végén nem is szerzett PhD-t), így a munka ezen része elhúzódott. Viszont az új megoldás sokkal elegánsabb és általánosabb, mint az eredeti elképzelés. A TCSA módszerben implementáltunk egy időfüggő Hamilton-operátorral megadott időfejlődést, és ennek segítségével nem csak az eredeti Affleck-Ludwig-féle  $g$ -függvényt (ami az alapállapothoz tartozik), hanem gerjesztett állapotok  $g$ -függvényeit is meghatároztuk. Ennek révén a peremes renormálási csoport folyamatok részletes nyomon követése vált lehetővé, az elméletek ún. modulus terében. Ráadásul az eredetileg tervezett form faktor alapú megközelítéssel szemben ez a módszer nem függ a modell integrálhatóságától. További jelentősége az eredménynek, hogy utat nyitott a térelméleti „quantum quench”-ek vizsgálatának új módszere felé, aminek kifejlesztését a közeljövőben tervezzük.

A változásnak megfelelően az eredeti elképzeléshez szükséges technikai közbenső lépésekre, azaz a peremes form faktorok leírására tömegrés nélküli elméletekben, illetve a véges hőmérsékletű 2-pont függvény konstrukciójára nem került sor; utóbbit egyébként a bulk esetben felmerült és mostanra megoldott problémák is hátráltatták.

## **6. Exponenciális véges méret effektusok**

A véges térfogatú form faktor formalizmus kiterjesztéseként analizáltuk az exponenciális korrekciók vezető tagjait, az ún.  $\mu$ -tagokat, amelyek a részecskék közötti kötött állapotú fúziókból erednek [8]. Kimutattuk, hogy ezek meglepően nagyok lehetnek még akkor is, ha az energiaszintek korrekciói kicsik, aminek oka a form faktorok analitikus szerkezetében keresendő. Az eredmények jelentősége a lokális operátorok mátrixelemeinek numerikus meghatározásában van: a szokásos kvalitatív elv, miszerint a korrelációs hossz ötszörösénél nagyobb térfogatban az exponenciális korrekciók nem jelentősek, nem feltétlenül érvényes, ennek fontos következményei lehetnek pl. részecskebomlások mátrixelemeinek meghatározását célzó rácstérelméleti számításokban. Az eredmények relevanciáját saját korábbi (nem rácson, hanem TCSA módszerrel elvégzett, de lényegében hasonló) számításaink analízisével demonstráltuk.

## **7. $OSp(2|2)$ Gross-Neveu és szigma modellek**

A véges méret effektusokkal kapcsolatos szakértelmünk egy alkalmazási lehetősége volt a Hubert Saleur-rel folytatott együttműködés, ahol a termodinamikai Bethe Ansatz segítségével  $OSp(2|2)$  szimmetriával rendelkező Gross-Neveu és szigma modellek  $S$  mátrixait elemeztük. A GN modellre sikerült a Bassi és Leclair által megsejtett  $S$  mátrix helyességét igazolni, valamint a szigma modell esetén az  $S$  mátrixról új információkhoz jutni. Sikerült egy érdekes dualitást feltárni az  $OSp(2|2)$  és  $SO(4)$  GN/sigma modellek között, valamint kimutatni, hogy a „random bond” Ising modellre Cabra és munkatársai által javasolt  $S$  mátrix nem lehet helytálló.

## **8. Aszimptotikus szóráselmélet a kvantum Potts spinláncban**

A véges méret effektusok egy másik alkalmazásaként megvizsgáltuk az egydimenziós kvantum 3-állapotú Potts spinlánc alacsonyenergiás effektív elméletét [6,9]. Kiderült, hogy ezt a tartományt a kontinuum határesetként előálló integrálható kvantumtérelmélet egzakt  $S$  mátrixa nem írja le jól. Ennek oka feltehetően az, hogy a rácson sérül az integrálhatóság, és az ezt okozó irreleváns operátor hatása a szórási amplitúdóban igen jelentős. Csak a kontinuum limeszhez nagyon közel várható, hogy egy átmeneti energiatartományban a kontinuum  $S$  mátrix jó leírását adja a modell dinamikájának. Ez a probléma jelenleg további vizsgálatok tárgyát képezi, az erről szóló cikk [6] pedig még mindig elbírálás

alatt áll.

## III. Összefoglalás

### 1. Összevetés a kitűzött célokkal

Az eredeti pályázatban kitűzött fő célokat sikerült elérni:

- Megalkottuk a véges hőmérsékletű korrelátorok spektrális kifejtésének szisztematikus módszerét.
- Továbbfejlesztettük a véges térfogatú form faktorok leírását:
- kiterjesztettük a formalizmust nemdiagonális szórásra;
- leírtuk a vezető exponenciális korrekciókat.
- Továbbfejlesztettük a TCSA módszert az NRG implementálásával.
- Hatékony módszert alkottunk peremes renormálási csoportfolyamok vizsgálatára.
- Eredményeket értünk el a peremes form faktor megoldásokhoz tartozó operátorok azonosításában.

### 2. Eltérések a kitűzött munkatervtől

Az eredetileg kitűzött munkaterven felül

- Kiterjesztettük a form faktor perturbációszámítást magasabb rendre.
- Szisztematikus módszert alkottunk nemintegrálható térelméletek effektív potenciáljának és szoliton spektrumának vizsgálatára.
- A véges méret effektusok segítségével vizsgáltuk a kvantum Potts spinlánc alacsonyenergiás szóráselméletét.
- TBA módszerrel analizáltuk  $OSp(2|2)$  invariáns Gross-Neveu és szigma modellek  $S$  mátrixát.

Az eredetileg kitűzött munkatervből nem valósult meg:

- Peremes form faktorok tömegrés nélküli elméletekben.
- Peremes operátorok véges hőmérsékletű korrelációs függvényei.

Ez az eltérés azonban nem akadályozta meg a kitűzött tudományos célok elérését, mivel a peremes renormálási csoport folyamatok vizsgálatára más, sok tekintetben hatékonyabb és általánosabb módszert találtunk.

### 3. Kitekintés

A véges hőmérsékletű korrelátorok spektrális kifejtése, bár még maga az elméleti keret is fejlesztendő (magasabb rendek vizsgálata, felösszegzési eljárások stb.) most már alkalmazható konkrét modellek vizsgálatára.

Mind a korrelátorokkal, mind a peremes elméletekkel és a TCSA továbbfejlesztésével kapcsolatban elért eredmények megnyitják az utat nemegyensúlyi folyamatok, ún. „quantum quenckek” esetén felmerülő érdekes kérdések vizsgálatához.

A Potts modell kapcsán talált effektus további megértésén, az irreleváns operátor azonosításán tovább dolgozunk.

# IV. Az OTKA támogatásával készült közlemények jegyzéke

1. G. Mussardo and G. Takács: *Effective potentials and kink spectra in non-integrable perturbed conformal field theories*, J. Phys. **A42**: art. no. 304022, 2009.
2. B. Pozsgay and G. Takács: *Form factor expansion for thermal correlators*, J. Stat. Mech (2010) P11012, 2010.
3. B. Pozsgay and H. Saleur: *Scattering and duality in the 2 dimensional  $OSP(2|2)$  Gross Neveu and sigma models*, JHEP **1002**: 008, 2010.
4. G. Takács: *Form factor perturbation theory from finite volume*, Nucl. Phys. **B825** (2010) 466-481, 2010.
5. M. Kormos and B. Pozsgay: *One-point functions in massive integrable QFT with boundaries*, JHEP **1004**: 112, 2010.
6. A. Rapp, P. Schmitteckert, G. Takacs and G. Zarand: *Asymptotic scattering and duality in the one-dimensional three-state quantum Potts model on a lattice*, arXiv:1112.5164 [cond-mat.stat-mech], 2011. Under peer review.
7. G. Fehér and G. Takács: *Sine-Gordon form factors in finite volume*, Nucl. Phys. **B852** (2011) 441-467, 2011.
8. G. Takács: *Determining matrix elements and resonance widths from finite volume: the dangerous  $\mu$ -terms*, JHEP **1111** (2011) 113, 2011.
9. G. Takács: *Finite volume analysis of scattering theory in the scaling Potts model*, arXiv:1112.5165 [cond-mat.stat-mech], 2011.
10. M. Lencsés and G. Takács: *Breather boundary form factors in sine-Gordon theory*, Nucl. Phys. **B852** (2011) 615-633, 2011.
11. G. Takács and G. Watts: *Excited state  $g$ -functions from the Truncated Conformal Space*, JHEP **1202** (2012) 082, 2012.
12. G. Z. Fehér, T. Pálmai and G. Takács: *Sine-Gordon multi-soliton form factors in finite volume*, Phys. Rev. **D85** (2012) 085005, 2012.
13. I.M. Szécsényi and G. Takács: *Spectral expansion for finite temperature two-point functions and clustering*, J. Stat. Mech., in press., 2012.

14. T. Pálmai and G. Takács: *Diagonal multi-soliton matrix elements in finite volume*, arXiv:1209.6034 [hep-th], 2012. Under peer review.

## V. Egyéb releváns közlemények jegyzéke

15. B. Pozsgay: *Finite volume form factors and correlation functions at finite temperature*, PhD thesis, Eötvös University, 2009.
16. T. Pálmai: *Regularization of multi-soliton form factors in sine-Gordon model*, Computer Physics Communications **183** (2012) 1813-1821, 2012.