

Szakmai beszámoló a K 73601 sz. OTKA zárójelentéséhez

A jelen OTKA témája logika, algebra, algebrai logika és relativitáselmélet logikai alapozása. Az algebrai logikai kutatásoknak az az egyik alapmotívuma, hogy ugyanazt a jelenséget logikai, algebrai és geometriai nyelven is leírja és a logikai, algebrai, valamint geometriai leírások között precíz „átjárást” definiál. Sőt a kutatás tárgya is ez a kapcsolatrendszer. A relativitáselméleti téridő vizsgálatok felépíthetők a geometria keretei között, tehát természetes módon illeszkednek a most vázolt kapcsolatrendszerbe.

Az algebrai logika, matematikai logika és relativitáselmélet kutatásainkban szervesen összefüggő részek, és ezen összefüggést kívánjuk hangsúlyozni munkánkban. A témák összefüggése miatt az eredmények alábbi témakörei sokhelyen átfedik egymást, egy-egy eredmény több címszó alá is kívánkozik.

Az OTKA projekt futamideje 2 év volt, a kutatási tervvel és munkatervvel összhangban a következő eredményeket értük el.

Az elért eredmények rövid ismertetése:

I. Operátoros Boole algebrák, a matematika alapjai és relativisztikus kiszámíthatóság elmélet.

a) Bizonyítottuk, hogy a halmazelmélet (és így az egész matematika is) felépíthető a 3-dimenziós szubsztitúcióalgebrák SCA3 variétésában illetve annak azonosságelméletében. Az SCA3 a 3-változós egyenlőségmentes elsőrendű logika algebrai megfelelője. Azt is bizonyítottuk, hogy az SCA3 variétás szabadalgebrai nem atomosak. Az SCA3 logikai megfelelőjére igaz a Gödel nem-teljességi tulajdonság [N09, Thm.4-6]. Az eredmények egy részét Gyenis Zsolt tanítványunk írta le [G10].

A fenti eredmény élesítéseként ebben az eredményben szeretnénk SCA3-at helyettesíteni a 3-dimenziós diagonálmentes cilindrikus algebrák Df_3 osztályával. Ez azt is jelentené, hogy a halmazelmélet felépíthető a 3-változós egyenlőségmentes logikában helyettesítés nélkül. (Alfred Tarski ezt a 4-változós egyenlőséges logikára bizonyította, és ez a 3-változós egyenlőségmentes logika a legélesebb változat, amit remélni lehet, mert a 2-változós logikára már tudjuk, hogy nem igaz.) Ebből az is következne, hogy a halmazelmélet felépíthető a $K_5 \times K_5 \times K_5$ jelű multimodális ítéletkalkulusban egyetlen ítéletváltozót használva. Az alapötlet a bizonyításra megszületett, azonban a részleteket még végig kell számolni. Annak bizonyítására is megszületett az alapötlet, hogy a szabad Df_3 algebrák nem atomosak élesítve egy Tarski problémára adott korábbi megoldásunkat. A 2-dimenziós szabad cilindrikus algebrák atomosak, jelezve az élesíthetőség határát.

b) A fenti eredményeket szeretnénk a relativisztikus téridőkre alapuló kiszámíthatóságelméletünkben alkalmazni. Ezzel kapcsolatban folyamatosan tanulmányozzuk ezen kiszámíthatóságelmélet kereteit, fizikai megvalósíthatóságának kérdéseit. Részeredményeket publikáltunk a Natural Computing folyóiratban [ANN09], és meghívott plenáris előadók voltunk az Unconventional Computing 08 (Bécs, 2008 május), a „The Science and Philosophy of Unconventional Computing” (Cambridge, 2009 március), valamint az Unconventional Computing 09 (Azori szigetek, 2009. szeptember) konferencián.

Ebben a témában nemrég (2009. szeptember) meglátogatott minket a világhírű fizikus Igor Novikov és kialakult egy közös projektum, melynek keretében a relativisztikus hiper kiszámíthatóság alapjait tervezzük új irányban továbbfejleszteni. Az alapkoncepció a Thorne-Novikov féle téridő-alagutak elméletének használata lenne a forgó fekete lyukak (Kerr-Newmann téridő) helyett.

c) [NS09] cikkünkben azt az eredményünket publikáltuk, hogy az n -dimenziós gyengén magasabbrendű cilindrikus algebrák varietása végesen axiomatizálható ha n nagyobb mint kettő. Ebből az eredményből következik, hogy az algebrai logika un. végesíthetőségi problémájának van pozitív megoldása bizonyos nem-jól-fundált halmazelméletekben. Ez az eredmény azt is mutatja, hogy a szóbanforgó varietás a Tarski-féle kvázi-projektív reláció algebrai alkalmas cilindrikus algebrai megfelelője lehet. Az eredmény tehát előrelépés mind az algebrai logika végesíthetőségi problémájában mind pedig a magasabbrendű logikák algebraizálása irányában.

II. Relativitáselméletek logikai struktúrájának analízise.

Relativitáselmélet és logika kapcsolatáról megcélzott eredményekből sokat elértünk, ebből született Székely Gergely OTKA résztvevő PhD disszertációja, melyet summa cum laude minősítéssel megvédett 2010-ben [SzD10]. Az elért eredmények közül kiemelnénk az általános relativitáselméletre kapott egyszerű axiómarendszer felírását, a rá kapott teljességi tételt, valamint a speciális és általános relativitáselmélet közötti átmenet, híd kiépítését, vizsgálatát matematikai tételek bizonyításával.

Ezek során a valós analízis sok folytonos és differenciálható függvényekre vonatkozó tételét kellett használni úgy, hogy tetszőleges valósan zárt test feletti definiálható függvényre vonatkozzanak az eredmények. Ennek kapcsán elkezdtük a valós analízis tételeinek és fogalmainak kidolgozását valós testek felett, csak elsőrendű logikát használva. Ezen eredményeket nagyra értékelte a disszertáció egyik opponense, a világhírű matematikus Robert Goldblatt <http://www.renyi.hu/~turms/RG.pdf>.

Ebbe a témakörbe tartozó eredmény az óraparadoxon axiomatikus analízise [SzSL10]. Az óraparadoxon a relativitáselmélet un. ikerparadoxon predikciójának speciális relativitáselméleti változata: ha két iker közül az egyik valamilyen sebességgel elmegy majd sebességet változtatva visszajön, akkor ő fiatalabb a találkozáskor, mert lassabban telt a sajátideje az út alatt. Megjegyezzük, hogy noha a paradoxon kifejezést sokszor úgy értik mint logikai ellentmondást, az óraparadoxon vagy ikerparadoxon kifejezésben csak szokatlan jelenségre utal, nem logikai ellentmondásra. Bizonyítottuk, hogy az óraparadoxon ellentettjéből következik a newtoni téridő elmélet (abszolút idő) bizonyos természetes F feltevések mellett, azok nélkül viszont nem. Hasonló kapcsolatokat bizonyítottunk az óraparadoxon és a idő lelassulása (idő dilatáció) valamint szokásosan használatos szimmetria axiómák között. Ilyen típusú állításokat csak szigorúan axiomatikus közelítésben lehet bizonyítani. A bizonyítás részeként az óraparadoxonnal ekvivalens geometriai állítást is bizonyítottunk.

A téridőelméleten kívül a dinamikai aspektusokkal is foglalkoztunk. Például megmutattuk, hogy speciális relativitáselméletben a tömegközéppont fogalma nem értelmezhető a legtöbb esetben.

Például ha két test (tömegpont) életútja kitérő, akkor nincs olyan életút, melyet minden megfigyelő tömegközéppontként értelmezhet (semmilyen, akár megfigyelőtől függő tömegeloszlás esetén sem) [MS10].

Eredményeink elismerését mutatja, hogy e témában több nemzetközi konferenciára hívták meg csoportunkat kiemelt plenáris meghívott előadónak, például „Vienna Circle and Hungary” (Bécs, 2008 május), “Logic and the foundations of physics: space, time and quanta” (Brüsszel, 2008. december), “Logic Colloquium 09” (Szófia, 2009. augusztus), “Mathematics, Physics and Philosophy in the Interpretations of Relativity” (Budapest, 2009 szeptember), “Logic, Language, Mathematics” (a conference in memory of Imre Ruzsa, Budapest, 2009 szeptember).

Vizsgáltunk egzotikus általános relativisztikus téridőket. A nagy, lassan forgó fekete lyuk egzotikumainak jobb megértése érdekében animációt készítettünk, mely azt mutatja, hogy mit lát(na) egy ilyen féregjáraton kontrollált eséssel átutazó és a lyuk fehér-lyuk párján kibukkanó űrhajós. Ennek az animációnak nagy sikere volt a Cambridgei konferencián és a Londoni Logic Group-ban, ahol bemutattuk. Az ELTE egyetemi reguláris kurzusunkon valamint a Filler utcai Általános Iskolában is bemutattuk, ahol szintén nagy lelkesedés és érdeklődés kísérte. Az animáció folyamatos fejlesztés alatt áll. A logikus Kurt Gödel és Einstein együttműködéséből származó általános relativisztikus téridőt is vizsgáltuk hasonló szellemben. Ezt a téridőt Gödel forgó univerzumának is nevezik. Az eredményt egy 48 oldalas cikkben publikáltuk [AAMN10].

III. Algebrai logika.

Binér relációk algebrainak vizsgálata mind az algebrai logikában, mind a számítástudományban fontos terület. Az algebrai logikában vizsgált és Tarski által bevezetett relációalgebrák un. pozitív redukciójának műveletei a binér relációk közti unió, metszet, üres halmaz, relációkompozíció, konverz és identitás reláció, míg a számítástudományban vizsgált un. Kleene algebrák műveletei az unió, üres halmaz, kompozíció, identitás reláció, és a reflexív tranzitív lezárás művelete. Vizsgáltuk azon algebrák osztályát, ahol ezen műveletek közül az összes vagy ennek egy részhalmaza van megengedve. Bizonyítottuk, hogy ha a műveletek között az unió is és a kompozíció is jelen van, akkor az osztály implikáció-elmélete nem végesen axiomatizálható [AM09]. Ezzel ellentétben, ha az unió, kompozíció, és identitás műveleteihez akár a metszetet, akár a konverzet hozzávesszük (de nem mindkettőt), akkor az azonosságelmélet végesen axiomatizálható [AM09]. Ismert, hogy ha a kompozíció, metszet és konverz együtt szerepel, akkor az azonosságelmélet nem végesen axiomatizálható [HM00], továbbá a kompozíció, metszet és identitás azonosságelmélete szintén nem végesen axiomatizálható [HM07] (tehát eredményünk szerint ha az uniót hozzávesszük, akkor végesen axiomatizálhatóvá válik). Az eredményt a rangos TACL09 (Topology, Algebra and Categories, Amsterdam) konferencián ismertettük. A konferencia szervezői az eredmény elismeréseként az előadást kiemelt (featured) rangra emelték. Ld. http://www.ilic.uva.nl/tac109/#URI=Contributed_Talks.

A Kleene algebrák azonosságelmélete nem végesen axiomatizálható [R64], azonban van véges sok implikáció (kvázi-azonosság), amiből bizonyítható az azonosságelmélet [K94]. Erősen vizsgált nyitott probléma, hogy ha a Kleene algebrák műveleteihez hozzávesszük a metszetet is, akkor vajon lehet-e hasonló véges axiómarendszer adni. Az [AM09]-ben bizonyított pozitív tétel első lépés egy ilyen megadása felé.

Az un. neat-reduktum algebrai logikában központi fogalom, Leon Henkin vezette be az elsőrendű logika teljességi tételére adott híres egyszerű bizonyítása kapcsán. Ezen fogalom sokkal többféleképpen kapcsolódik az algebrai logika többi központi fogalmához mint eddig tudtuk. Ezen kapcsolatokról szól a [MS09a] - [MS09b] cikkpár, ahol e kapcsolatokat felhasználva az algebrai logika több híres problémájára adunk megoldást és eközben újfajta konstrukciókat is bevezetünk.

Az I. témakör a) és c) pontjában leírt SCA3-ra illetve gyengén magasabbrendű cilindrikus algebrákra vonatkozó eredményrendszer e pont alá (algebrai logika) is tartozik.

Irodalom

[AAMN10] Andai, A., Andréka, H., Madarász, J. X., Németi, I., Visualizing ideas about Gödel-type rotating universes. In: Scherfner, M., Plaue, M. (eds.) Gödel-type spacetimes: history and new developments. Collegium Logicum, Kurt Gödel Society, Vienna (közlésre elfogadva).

[AM09] Andréka, H., Mikulás, Sz., Axiomatizability of Positive Algebras of Binary Relations. Algebra Universalis (közlésre beküldve).

[ANN09] Andréka, H., Németi, I., Németi, P., General relativistic hypercomputing and foundation of mathematics. Natural Computing 8,3 (2009), 499-516.

[G10] Gyenis, Z., On atomicity of free algebras in certain cylindric-like varieties. Logic Journal of IGPL (közlésre elfogadva).

[HM07] Hirsch, R., Mikulás, Sz., Representable semilattice-ordered monoids. Algebra Universalis 57 (2007), 333-370.

[HM00] Hodkinson, I., Mikulás, Sz., Axiomatizability of reducts of algebras of relations. Algebra Universalis 43 (2000), 127-156.

[K94] Kozen, D., A completeness theorem for Kleene algebras and the algebra of regular events. Infor. and Comput. 110,2 (1994), 366-390.

[MS09a] Madarász, J.X., Sayed-Ahmed, T., Neat reducts and amalgamation in retrospect, a survey of results and some methods. Part I: Results on neat reducts. Logic Journal of the IGPL 17,4 (2009), 429-483.

[MS09b] Madarász, J.X., Sayed-Ahmed, T., Neat reducts and amalgamation in retrospect, a survey of results and some methods. Part II: Results on amalgamation. Logic Journal of the IGPL 17,6 (2009), 755-802.

[MS10] Madarász, J.X., Székely, G., Comparing relativistic and Newtonian dynamics in first-order logic. In: Stadler, F. (ed.) Wiener Kreis und Ungarn, Veröffentlichungen des Instituts Wiener Kreis, Springer Verlag (közlésre elfogadva).

[N09] Németi, I., Formalizing set theory in weak fragments of algebraic logic. Short Note, 2009 október. 3 old. <http://www.math-inst.hu/~nemeti/NDis/formalizingsettheory.pdf>

[NS09] Németi, I., Simon, A., Weakly higher order cylindric algebras and finite axiomatization of the representables. *Studia Logica* 91 (2000), 53-62.

[R64] Redko, V.N., On defining relations for the algebra of regular events. *Ukrain. Mat. Z.* 16 (1964), 120-126.

[SzD10]. Székely, G., First-order logic investigation of relativity theory with an emphasis on accelerated observers. Eötvös Loránd University, PhD Disszertáció, Budapest, 2009.

[SzSL10]. Székely, G., A geometrical characterization of the Twin Paradox and its variants. *Studia Logica* (közlésre elfogadva).