# SZAKMAI ZÁRÓJELENTÉS
# a K 61116 sz. kutatásról

A kutatás igen sikeres volt, számos területen jelentős előrehaladást sikerült elérni. Hűek maradtunk a pályázatban vázolt interdiszciplináris jelleghez, és a szigorúan vett algebrai geometriai problematikát és módszereket ötvöztük más területek technikáival. Különösen jelentős eredmények születtek a szingularitás-elméletben, ahol topológiai módszereket is használtunk, a számelmélet inspirálta aritmetikai geometriai kérdések terén, illetve az algebrai csoporthatások és invariánsaik vizsgálatában. Alább részletesebben is összefoglaljuk az egyes témakörök legfontosabb eredményeit.

**Szingularitás-elmélet** (Némethi András, Szilárd Ágnes, 2009-ben Stipsicz András)

Komplex normális algebrai felületek szingularitásait tanulmányoztuk a kétdimenziós algebrai geometria és a négydimenziós topológia módszereinek ötvözésével. A Milnor-fibrum révén a valós 3-sokaságok topológiája is központi szerepet játszott vizsgálatainkban.

Tanulmányoztuk valós 3-sokaságok Seiberg--Witten-invariánsait, és ezek kapcsolatát a komplex felület-szingularitásokkal. Több új mûtét-formulát bizonyítottunk. Az egyik T. Okumával közös formula segítségével sikerült igazolni a Seiberg--Witten invariáns-sejtést Neumann és Wahl ún. `splice típusú' szingularitásaira. E szingularitásokra az eredeti Neumann-Wahl sejtést is bizonyítottuk. A fő eredmény azt mondja ki, hogy ha a szingularitás csomója egesz homológia-gömb, akkor a Milnor-fibrum szignatúrája a csomó Casson-invariánsának nyolcszorosa. A formula azon `nehéz' eredmények közé tartozik, amelyek az absztrakt topologikus csomóból határozzák meg a beágyazási, ill. analitikus invariánsokat. Egy másik, Braun Gáborral közös műtéti formula eltér a `megszokott' eljárásoktól, ugyanakkor jelenleg csak szinguláris csomókra alkalmazható. Fő jelentősége abban rejlik, hogy kapcsolatot teremt a szingularitás-elméletben használt különféle zeta-függvényekkel és többváltozós Poincaré-sorokkal. Segítségével a csomó Seiberg-Witten-invariánsai leírhatók bizonyos többváltozós Poincaré-sorok `periodikus konstansaiként'. Ez újabb kapcsolatot teremt az analitikus és a topologikus invariánsok között, amely rámutat a Seiberg-Witten invariánsok és a geometriai nem általánosításainak párhuzamaira.

Szintén 3-sokaságokon Legendre-féle és transzverz csomóknak találtuk meg egy új invariánsát. Az invariáns a csomó Floer-homológiájának eleme, és segítségével ún. túlcsavart 3-sokaságokban is lehetővé vált transzverz csomók vizsgálata. Egy másik cikkben osztályoztuk azokat a súlyozott homogén szingularitásokat, melyeknek van olyan simítása, amelynek racionális homológiája megegyezik a 4-dimenzios körlapéval. A példák nagy része már ismert volt, a cikkben szimplektikus topológia és meglehetősen összetett kombinatorikai érvelés segítségével beláttuk, hogy a lista teljes.

Több éven átívelő kutatásunk célja volt leírást adni nemizolált komplex felület-szingularitások Milnor-fibrumának határára. Milnor és Neumann klasszikus munkássága nyomán jól ismert tény, hogy komplex felületek izolált szingularitásainál a Milnor-fibrum határa megadható műtéti diagramként, s ez meghatározza a határ topológiáját. A kutatás eredményeként beláttuk, hogy *nemizolált* komplex felület-szingularitások Milnor-fibrumának határa is megadható műtéti diagram formájában. A diagramok előállítására egy geometriai és kombinatorikai módszereket ötvöző algoritmust dolgoztunk ki. Az alkamazott módszer segítségével a Milnor-fibrum ún. vertikális és horizontális monodrómiáira is képletet sikerült kapnunk. Az elméleti eredményeket számos konkrét példa is illusztrálja. Melléktermékként új 3-sokaságok konstrukciója is adódott, természetes Stein betöltésekkel.

A szingularitás-elmélet alkalmazásaként előrehaladást értünk el a racionális irreducibilis komplex algebrai görbék osztályozásában. Osztályoztuk azt az esetet, amikor a görbének egyetlen szinguláris pontja van, amely irreducibilis, és egy Puiseux-párral jellemezhető. Megfogalmaztunk egy sejtést arra az esetre, amikor egyetlen irreducibilis szinguláris pont van. A sejtés a lokális szinguláris pont félcsoportjának sűrűségeloszlását kapcsolja össze a görbe fokszámával. Igazoltuk a sejtést azon esetekben, amikor a görbe komplementumának log-Kodaira dimenziója kisebb, mint 2, valamint minden egyéb konkrétan ismert görbére.

**Aritmetikai geometria** (Szamuely Tamás)

Az aritmetikai geometria területén három témakörrel foglalkoztunk. Az első számtestek feletti algebrai varietások racionális pontjairól szól. Hasse és Minkowski klasszikus tételei óta a racionális pontokra vonatkozó lokális-globális elvek a legtöbbet vizsgált aritmetikai kérdések közé tartoznak. 1970-ben Manin bevezetett egy kohomologikus obstrukciót, amellyel meg tudta magyarázni a lokális-globális elv sérülését bizonyos típusú varietásokon, például Abel-varietások homogén terein. Tíz évvel később J-J. Sansuc hasonló eredményt bizonyított algebrai tóruszok (és általánosabb lineáris csoportok) homogén tereire. Lényegében azóta nyitott volt a kérdés, létezik-e közös általánosítás szemi-Abel varietásokra. Ezt a problémát oldottuk meg D. Hararival közösen. A bizonyítás egyes részlépései önmagukban is érdekesek, így például felállítottunk egy Cassels-Tate típusú duális egzakt sorozatot számtestek felett definiált Deligne-féle 1-motívumokra a Tate-Safarevics csoport végességének feltevése mellett, illetve hiperkohomologikus kupa-szorzatként állítottuk elő az ún. Brauer-Manin-párosítást.

A másik téma az algebrai fundamentális csoport elmélete, amelyről monográfiát is publikáltunk. A jelen kutatás keretein belül Grothendieck híres szelés-sejtésére fókuszáltunk. A sejtés szerint számtest feletti legalább 2 nemű sima projektív görbéken a racionális pontok bijekcióban állnak az algebrai fundamentális csoportból az alaptest abszolút Galois-csoportjába menő természetes leképezés szeléseinek konjugált osztályaival. Meglepő módon egészen a legutóbbi évekig nem sikerült konkrét példákon ellenőrizni az állítást, és a jelenleg ismert példák mind olyanok, amelyeknél nincs pont és nincs szelés. Ennek oka, hogy szelések létezését nagyon nehéz kontrollálni. D. Hararival mi adtuk az első olyan példát, amelyben mindenütt lokálisan létezik szelés (sőt pont is), de globálisan nem (és pont sem). A módszer érdekessége, hogy kapcsolatot teremt a szelések létezése és egy Abel-varietások Tate-Safarevics-csoportjára vonat-kozó nehéz megoldatlan probléma között. Eredményünket egy általános tételből vezettük le, amely szükséges és elégséges feltételt ad a homotópia egzakt sorozat felhasadására.

J-L. Colliot-Thélène-nel a véges testek feletti varietások kohomológiájára vonatkozó híres Tate-sejtéssel foglalkoztunk. Régóta ismert, hogy a sejtés egész együtthatós kohomológiára általában nem igaz, ám várható, hogy alacsony dimenziójú ciklusokra mégis teljesül. Ennek kapcsán részletesen tanulmá-nyoztuk C. Schoen 1-ciklusokra vonatkozó eredményét, és levezettünk belőle egy kritériumot 1 fokú nulla-ciklusok létezésére véges testek feletti görbék függvénytestei felett definiált teljes metszet sokaságokon.

**Invariánselmélet, algebrai csoportok** (Domokos Mátyás, Frenkel Péter, Szabó Endre)

Komplex tükrözéscsoportok egy osztályára (amely tartalmazza a szimmetrikus csoportokat és a B típusú Weyl-csoportokat) megadtuk a számos vektor-változótól függő polinom-invariánsok algebrájának egy véges prezentációját explicit generátorokkal és relációkkal. A módszert alkalmaztuk a multi-szimmetrikus polinomok algebrájának egy új, karakterisztikától független prezentácójára is.

Megmutattuk, hogy a polarizáció triviális változata is elegendő polinominvariánsok szeparáló rendszereinek konstruálásához: a legfeljebb 2dim(V) vektorváltozótól függő invariánsok szeparáló rendszert alkotnak. Reduktív csoportok esetén dim(V)+1 vektorváltozó elegendő. E gondolatot binér formák invariáns-elméletére alkalmaztuk, a Klein-féle poliéder-csoportok Helly-dimenziójának meghatározása által.

Kidolgoztunk egy konstrukciót, amely egy tetszőleges tegez reprezentációit parametrizáló modulusteret sűrű nyílt részsokaságként beágyazza egy páros tegez megfelelő modulusterébe. Az utóbbi modulustér már projektív algebrai varietás. A konstrukció váratlan tulajdonsága, hogy a nagyobb modulustérben nem jelennek meg újfajta szingularitások. Az eredmény azért hasznos, mert számos esetben megszabadít attól az ezekre a modulusterekre vonatkozó (jelenleg is folyamatosan bővülő) irodalomban tipikus megszorítástól, hogy a tegez nem tartalmaz irányított kört. Megfogalmaztunk egy tételt, amely a kibővített Dynkin-féle tegezeket jellemzi az összes tegezek között az említett modulusterek simasági tulajdonságai által. Ez azért természetes kiegészítése az idevágó irodalomnak, mert a modern reprezentációelmélet egyik alapköve az az eredmény, miszerint egy tegez akkor és csak akkor szelíd reprezentációs típusú, ha kibővített Dynkin.

Igazoltuk a klasszikus Speiser-lemma véges csoportokról algebrai csoportokra vonatkozó általánosítását. Ezzel új és természetes bizonyítását kaptuk egy ekvivariáns vektornyalábok trivializálhatóságát garantáló állításnak, amely alapvető eszköz az úgynevezett racionalitási kérdések vizsgálatában.

Bevezettük a Helly-dimenzió fogalmát algebrai csoportokra. A Helly-dimenzió a zárt mellékosztályok hálójának egy tisztán kombinatorikusan definiálható invariánsa. Megmutattuk, hogy minden komplex lineáris algebrai csoport Helly-dimenziója véges, és rámutattunk, hogyan használható a Helly-dimenzió egy tetszőleges (algebrai) csoporthatásban a pályák hálójának leírásához. A tételnek érdekes és hasznos következményei vannak az invariáns-elméletben.

Pyber Lászlóval generátorrendszerek hatványainak méretét vizsgáltuk Lie típusú véges egyszerű csoportokban. Bebizonyítottuk, hogy a hatványok mérete minden esetben exponenciális ütemben növekszik, mindaddig, míg el nem éri a csoport méretét. Ezt az állítást korábban csak nagyon speciális csoportokra ismerték. Az eredménynek már a jelenlegi formájában is számos alkalmazása van: jól használható bizonyos számelméleti szita-módszerekben, és expander gráfok konstrukciójában. A bizonyítás ötvözi az algebrai geometria és a csoportelmélet módszereit, várható, hogy segítségével sokkal jobban megérthetjük majd a véges lineáris csoportok szerkezetét.

**Donaldson—Thomas-elmélet** (Szendrői Balázs)

Vizsgáltuk a topologikus húrelmélet partíciós függvényét lokális Calabi-Yau sokaságokon. Eredményeink új kapcsolatokat teremtenek nem-kommutatív algebrai geometria, dimer modellek kombinatorikája és húrelméleti partíciós függvények között. A nemkommutatív Donaldson--Thomas-elmélet terén enumeratív invariánsokat definiáltunk 3-dimenziós nemkommutatív Calabi-Yau-algebrákra, és a hozzájuk tartozó generátor-függvényeket kombinatorikus és geometriai nézőpontból vizsgáltuk.

Kategorizálási eredményeket értünk el a 3-sokaságok ponthalmazainak Hilbert-sémájára vonatkozó Donaldson-Thomas-elméletben: a numerikus Behrend-függvényt egy perverz kévével helyettesítettük, amelynek Poincaré-polinomja finomítását adja a numerikus Donaldson-Thomas invariánsoknak. Az eredmények magasabb dimenziós általánosításokat is sejtetnek, amelyeknek kidolgozásán jelenleg is dolgozunk.

**Divizorok varietásokon** (Küronya Alex)

A minimális modell program segítségével tanulmányoztuk projektív varietásokon az effektív divizorok kúpjának belső szerkezetét. Reményeink szerint ezzel a módszerrel néhány lineáris rendszerekre vonatkozó nyitott probléma is megválaszolható. Bebizonyítottuk továbbá, hogy tetszőleges dimenzióban, meglehetősen általános feltételek mellett létezik effektiv b-divizoroknak Zariski-felbontása. Itt a Zariski-felbontás fogalmát a szokásos divizorok körében meglévőhöz képest módosítani kell.

V. Lozovanuval és C. Macleannel közösen jelentős előrehaladást sikerült elérni projektív varietásokon értelmezett divizorok egy fontos aszimptotikus invariánsával, az ún. Okounkov-testtel kapcsolatban. Lazarsfeld és Mustata eredményeit pontosítva beláttuk, hogy felületek esetében egy divizorhoz tartozó Okounkov-test nemcsak lokálisan poliéderes felépítésű, hanem minden esetben poligon is. A torikus varietások elméletének segítségével leírtuk az összes olyan poligont, amely előfordul valamely valós együtthatós divizor Okounkov-testjeként sima felületen. Ugyanakkor több példán keresztül rámutattunk arra, hogy magasabb dimenzióban még erős véges generáltsági tulajdonságokkal rendelkező varietásokon sem mindig poliéder az Okounkov-test. Megmutattuk azt is, hogy sima varietásokon összesen megszámlálhatóan sok konvex test fordulhat elő valamely divizor Okounkov-testjeként.