

Zárójelentés a

Szimmetria és optimumok elágazásai

című OTKA kutatási témáról.

(2005. 02. 01. – 2008. 12. 31.)

Készítette: Domokos Gábor

A Zárójelentésben *dőlt betűkkel* idézni fogjuk a Munkatervben kitűzött kutatási célokat, az ott megadott sorszámozással. Minden cél után összefoglaljuk az eredményeket és hivatkozunk a megjelent publikációkra. A publikációk egyesített listáját az OTKA adatbázis tartalmazza, ebbena jelentésben témakörönként elkülönítve szerepelnek.

1. *Nem-sima („tükrözött”), egyváltozós, egyparaméteres potenciálok kritikus pontjainak osztályozása.*

Ezek a potenciálok természetes módon jelentkeznek, ha tengelyszimmetrikus szerkezetek optimális elrendezését keressük. A szakirodalomban megtalálhatóak az egyváltozós, szimmetrikus, sima potenciálok, valamint egyváltozós, nem-sima, nem-szimmetrikus potenciálok. Célunk ezen elméletek kismértékű általánosítása. Határidő: 2005. Várható eredmény: folyóiratcikk.

Eredmények összefoglalása:

Osztályoztuk az egyváltozós, tükrözött potenciálok kritikus pontjait és megállapítottuk a tipikus optimum-elágazások jellegét, ezek nem egyeznek a sima függvényeknél ismert típusokkal [1-1]. Külön osztályoztuk azokat az eseteket, amikor a generáló potenciál páros- illetve páratlan függvény. Előbbi esetben természetesen a sima függvényekre vonatkozó eredményeket kapjuk, hiszen egy páros függvény tükörképe önmaga, utóbbi esetben igen érdekes, 5 ágú elágazást mutattunk ki tipikus esetben. Minden elágazás-típushoz mutattunk szerkezeti példát.

Publikáció:

[1-1] P.L. Várkonyi P., G. Domokos: *Symmetry and bifurcation of optima*, Nonlinear Dynamics, Vol 43, pp 47-58., 2006

2. *Az előző pontban azonosított kritikus pontok illusztrálása tartószerkezeti példákon keresztül.*

Különösen érdekesek ezen belül azok az esetek, ahol a szimmetriukus optimumból aszimmetrikus optimumok ágaznak el. Ilyenkor ugyanis a szimmetriukus szerkezet kis megváltoztatásával javítható a teherbírás. Határidő: 2005, 2006. Várható eredmény: folyóiratcikk, PhD disszertáció.

Eredmények összefoglalása:

Sikerült példát mutatnunk olyan téglalap keresztmetszetű, nyomott, szimmetrikusan terhelt vasbeton oszlopra, amelynél a vasalás aszimmetrikus elhelyezése a legalacsonyabb (mértékadó) kritikus terhet növeli [2-1]. A kívánatos (optimális) vasalási aszimmetria mértéke a téglalap arányaitól függ, egy kritikus arány alatt a szimmetrikus vasalás az

optimális, azon felül az arány növekedésével az optimális aszimmetria mértéke is növekszik. Analitikusan meghatároztuk az elágazási pontot és numerikusan meghatároztuk az optimum-bifurkációs diagramot. Numerikus módszerrel meghatároztuk a feszített hídgerendákban fellépő aszimmetrikus deformációkat [2-2].

Megállapítottuk, hogy statikailag határozott rácsostartók gyakran mutatnak neutrális viselkedést, vagyis a szimmetria kis megzavarása nem befolyásolja a legjobban igénybevett rudakban ébredő erőket. [2-3]. Példákat mutattunk neutrális és nem neutrális viselkedésre statikailag határozott és határozatlan tartók körében [2-4].

Publikációk:

[2-1] A.A. Sipos, G. Domokos: *Slightly asymmetric beams: examples of a new class of structural optima*, Int'l. J. of Nonlin. Mech Vol 42 (3) pp 504-514 (2007), 2007

[2-2] A.A. Sipos, G. Domokos: *Predicting unfavourable deformations of bridge beams using grid technology*, Proc. 11th Intl. Conf. Civ. Eng. Comp., B.H.V. Topping (Editor), Civil-Comp Press, Stirlingshire, Scotland. CD-ROM, PAPER 173, 2007

[2-3] K. Tóth, G. Domokos: *Neutral behaviour of trusses: Imperfect symmetry and geometry*, Journal of the International Society for the Interdisciplinary Study of Symmetry. Proc. Int. Conf. Harmony of Forms. Eds. D. Nagy and O. Bodnar Vol. 1-4. pp.114-117, 2008

[2-4] K. Tóth, G. Domokos, P.L. Várkonyi: *Optimal trusses with imperfect symmetry*, Proc. 3rd Intl. Conf on Eng., Mech and Comp. Ed. A. Zingoni. Millipress, Rotterdam, 2007. pp685-686, CD:ISBN 978 90 5966 057 1, 2007

3. Az előző két pontban felsorolt feladat általánosítása.

Első általánosítási lehetőség több változó bevezetése. Ez azért érdekes, mert míg egyváltozós optimalizálás esetén –jelenlegi ismeretünk szerint – a szimmetrikus konfiguráció tipikusan optimális, kétváltozós esetben ez már nem igaz. Olyan példa is elképzelhető, ahol mindkét változó szerint optimális a szimmetrikus alakzat, de a két változót együtt tekintve már nem az. További általánosítási lehetőség a magasabb rendű szimmetriák vizsgálata, inhomogén anyagú (pl. vasbeton) tartók vizsgálata. Határidő: 2006. Várható eredmény: folyóiratcikk, disszertáció.

Eredmények összefoglalása:

Meghatároztuk annak feltételét, hogy egy tetszőleges, véges, adott szimmetria-csoporttal rendelkező szerkezet javítható-e adott szimmetria-sértő változók terében [3-1],[3-2]. Eredményünk lényege egyrészt, hogy nem minden szerkezet javítható. Másrészt a szerkezet szimmetria-csoportjának a változók terében értelmezett reprezentációja alapján megállapítható, hogy a szerkezet potenciálisan javítható-e, vagyis, hogy érdemes-e pontosabb mechanikai számítást végrehajtani a javíthatóság pontos megállapítása érdekében.

Publikációk:

[3-1] P.L. Várkonyi, G. Domokos: *Imperfect symmetry: a new approach to structural optima via group representation theory*, Int'l. J. of Solids and Structures Vol 44, pp4723-4741 (2007), 2007

[3-2] Várkonyi P.L.: *Emergence of asymmetric optima in structural design and evolution.*, PhD disszertáció, BME Építészmérnöki Kar, 2006

4. Az aszimmetria felbukkanásának vizsgálata az evolúcióban.

Ha abból indulunk ki, hogy az evolúció során is optimalizálási elvek érvényesülnek, akkor ez a feladat szorosan összefügg az aszimmetrikus tartó szerkezeti optimumok megjelenésének kérdésével. Annyiban tér el, hogy az evolúció egyik általánosan elfogadott modellje az adaptív dinamika szerint a folyamat gyakoriságtól függő, tehát nem írható le rögzített potenciál segítségével. A pont elején megfogalmazott cél eléréséhez több feladatot is el kell végeznünk:

- a) *Az adaptív dinamika alapjainak mélyebb megértése. Az adaptív dinamika ma elfogadott elmélete az „inváziós fitness” fogalmán alapul, azaz feltételezi, hogy minden időpontban csak egyetlen ritka mutáns van jelen, amely vagy elterjed, vagy nem, a már egyensúlyba jutott „rezidens” változatokkal szemben. Célul tűzzük ki az elmélet mélyebb megalapozását, amely ilyen egyszerűsítő feltevések helyett közvetlenül a versengő populációk dinamikájából vezeti le az evolúció dinamikáját. Határidő: 2007. Várható eredmény: folyóiratcikk.*

Eredmények összefoglalása:

Az adaptív dinamika új megfogalmazása [4-1] az evolúció során változó adaptív tájkép fogalmán alapul. A változást a fejlődő populációk okozzák az ökológiai visszacsatoláson keresztül. Noha ez a tárgyalás matematikailag lényegesen nehezebb, mint a páros elterjedési térképen alapuló, sokkal közelebb van a biológiai intuíciónak és kevesebb feltevésen alapul. Az egyébként tetszőlegesen specifikált visszacsatolásra egyetlen folytonossági megkötést kell tennünk. A hasonló fenotípusok relatív gyakoriságának csak kis hatása lehet a tájképre. Ebből az egyetlen feltevésből analitikusan levezettük, hogy az evolúció általában irányított jellegű és az adaptív tájképen felfelé mozog. Ez az irányított evolúció a tájkép folyamatos változása miatt időnként egy fitness-minimumba konvergál be, ilyenkor evolúciós elágazás következik be. Megmutattuk, hogy a lokális adaptív dinamika egy adott pont közelében mindig leírható egy effektív Lotka-Volterra modellel. A mondottakkal összefüggő eredményeket írtunk le kimondottan a fiziológiailag struktúrált populációk esetére [4-2].

- b) *Adaptív fajkeletkezés. Szexuálisan szaporodó populációkban az adaptív dinamika által leírt evolúciós elágazás akkor vezet új faj kialakulásához, ha a szétfelődő változatok genetikailag izolálódnak. Megvizsgáljuk ennek az izolációs mechanizmusnak a minimális populációgenetikai modelljét. Határidő: 2007. Várható eredmény: folyóiratcikk.*

Eredmények összefoglalása:

Ha az evolúciós elágazást egy új faj keletkezéséként értelmezzük, akkor a megközelítés általános jellege egységesíti a szimpatrikus, parapatricus és allopatricus speciációs módokat [4-4]. Az így előálló „darwini” (Will Provine kifejezése) speciációs elmélet egy új faj keletkezését egy új niche-hez való alkalmazkodásként látta. Egy ilyen értelmezés azonban feltételezi, hogy az adaptív dinamika alapvetően ökológiai megközelítését kiegészítjük a genetikai kérdések modellezésével. Ennek érdekében megvizsgáltuk a fajkeletkezés során a reproductív izolációra való szelekció egy minimál-modelljét [4-3]. A legegyszerűbb esetre való konklúzió az, hogy a hibrid-hátrány izolációra szelektál – ahogy azt szemléletesen el is várjuk. Ezt az egyszerű képet azonban mind ökológiai mind pedig a szexuális szelekcióból adódó hatások komplikálják.

- c) *Az aszimmetria evolúciójának adaptív dinamikája. Ismeretes, hogy bármilyen bifurkációs mintázat lényegesen függ a probléma szimetriaviszonyaitól. Ennek megfelelően megvizsgáljuk, hogy az aszimmetrikus testfelépítés evolúciója mennyiben különbözik az adaptív dinamika szokásos elágazási mintázataitól.* Határiső: 2006: Várható eredmény: folyóiratcikk, disszertáció

Eredmények összefoglalása:

Megvizsgáltuk a szimmetriasértő bifurkációs mintázatok evolúciós viselkedését az adaptív dinamika kontextusában [4-5]. Megkülönböztettünk gyenge és erős bifurkációkat. Az előbbi olyan populációkra vonatkozik, amelyekben csak az összes egyed együttes tükrözése invariáns transzformáció. Az utóbbi esetben viszont az egyedek egymástól függetlenül is tükrözhetőek. A gyenge szimmetria esetében az evolúciós elágazás két aszimmetrikus variánshoz – amelyek egymás tükörképei – vezet a szimmetrikus ős eltűnésével. Erős szimmetriánál viszont az elágazás egy szimmetrikus és egy nem szimmetrikus változathoz vezet, és mindkettő túlél. Az utóbbi eset különbözik az adaptív dinamika generikus elágazási mintázatától, amely mindig szimmetrikus. Konkrét biológia példákat prezentáltunk mindkét féle szimmetria létre.

Publikációk:

[4-1] Meszéna, G., M. Gyllenberg, F. J. Jacobs & J. A. J. Metz: *Link between population dynamics and dynamics of Darwinian evolution.*, Physical Review Letters 95(7): 078105 (2005), 2005

[4-2] Durinx, M., J. A. J. Metz & G. Meszéna: *Adaptive dynamics for physiologically structured population models*, Journal of Mathematical Biology (in press), 2008

[4-3] Pennings, P.S., M. Kopp, G. Meszéna, U. Dieckmann & J. Hermisson: *An analytically tractable model for competitive speciation*, American Naturalist (in press), 2008

[4-4] Szilágyi A., Meszéna G.: *Two-patch model of spatial niche segregation*, Evolutionary Ecology (in press), 2008

[4-5] Várkonyi P.L., Meszéna, G., Domokos, G.: *Emergence of asymmetry in evolution*, Theor. Pop. Dyn. Vol 70: pp 63-75., 2006

5. Sima és nem-sima konvex, szimmetrikus merev testek egyensúlyi helyzeteinek vizsgálata . Ez a feladat szorosan kapcsolódik a tartószerkezeti optimumok témaköréhez. Stabil egyensúlyi helyzeteket „optimálisnak”, instabilokat „pesszimálisnak” tekintve a gravitációs potenciál tekinthető a tartószerkezeti optmálásban használt potenciál analógiájának. Megfigyelhetjük, hogy –hasonlóan a tartószerkezetekhez – sima burokkal (potenciállal) rendelkező konvex testek esetén a szimmetriukus konfiguráció egyaránt lehet stabil vagy instabil (optimum vagy pesszimum), nem sima esteben (poliéderek) azonban a szimmetrikus konfiguráció tipikusan stabil (optimális). Célunk ennek a jelenségkörnek és aza anlógiának a feltérképezése, különös tekintettel az egyensúlyi helyzetek minimális számára. Határidő: 2006. Várható eredmény: folyóiratcikk.

Eredmények összefoglalása:

Ezen vizsgálatok során sikerült megoldanunk egy V.I. Arnold által felvetett matematikai problémát: bebizonyítottuk, hogy létezik olyan homogén, konvex test melynek csak egy stabil és egy instabil egyensúlyi helyzete van [5-1]. Ezen eredményeket foglalja össze közérthető, népszerűbb formában az [5-2] publikáció. Ugynezen cikk röviden említést tesz egy, a munkatervben nem szereplő, a kutatási programon kívül végrehajtott fejlesztésről is, melynek során megépítettünk egy ilyen testet.

Publikációk:

[5-1] Várkonyi P.L., Domokos, G.: *Static equilibria of rigid bodies: dice, pebbles and the Poincare-Hopf Theorem*, J. Nonlinear Sci. Vol 16: pp 255-281, 2006

[5-2] Várkonyi P.L., Domokos, G.: *Mono-monostatic bodies: the answer to Arnold's question*, Mathematical Intelligencer 28 (4) pp34-38, 2006

6. Optimális ciklusok és aszimmetrikus eloszlások diszkrét leképezésekben *Diszkrét állapotterű (például digitalizált) leképezések viselkedésében is érdekes módon kapcsolódik össze az optimum (stabilitás) és az aszimmetria. Eddig is ismert volt, hogy ha egy $f: I \rightarrow I$ egyváltozós, kaotikus leképezést diszkrétizálunk (Vagyis az egység-intervallumra N ekvidisztáns osztópontot helyezünk), akkor a diszkrét rendszer (ellentétben a folytonossal) csupa periodikus attraktorral (ciklussal) fog rendelkezni. A ciklusok hossza, elrendezése érzékenyen függ a diszkrétizálás N paraméterétől. Közel sem ennyire ismert azonban, hogy a diszkrét rendszer ciklusai gyökeresen eltérő stabilitást mutatnak, Vizsgálható az N paraméter változtatásával kapcsolatos, illetve a zajjal kapcsolatos stabilitás. Célunk ezen stabilitások definiálása, méghozzá az adott ciklushoz vagy az adott leképezéshez rendelt sűrűségfüggvény segítségével. Azt szeretnénk kimutatni, hogy a diszkrét ciklusok stabilitása szoros kapcsolatban áll a – megfelelően megalkotott – sűrűségfüggvény aszimmetriájával, amit ferdeségnek vagy harmadik momentumnak is neveznek. Ennek a vizsgálatnak közvetlen alkalmazási területe a populáció-dinamika, ahol zajos, diszkrét rendszerek működnek, és ahol fontos kérdés, hogy a diszkrét dinamika melyik ciklusa „éli túl” az adott környezeti zajszintet. Határidő: 2006., 2007. Várható eredmény: folyóiratcikk*

Eredmények összefoglalása:

Diszkrét ciklusok statisztikus viselkedését vizsgáltuk, és kimutattuk, hogy stabilitásuk szoros korrelációt mutat a vonatkozó sűrűségfüggvény ferdeségével [6-1]. Megmutattuk, hogy diszkrét ciklusok zajjal szembeni stabilitása alapvető fontosságú populáció-dinamikai jelenségek leírásakor: kaotikus jellegű viselkedés csak bizonyos zajszint felett mutatható ki [6-2].

Publikációk:

[6-1] Domokos G., Bohák A.: *Aszimmetrikus eloszlások és optimális ciklusok: érdekességek a diszkrét populációdinamikából*, Magyar Tudomány, Vol 166. No. 5 (2005.) pp 545-552., 2005

[6-2] I. Scheuring, G. Domokos: *Only noise can induce chaos in discrete populations*, Oikos Vol 166, pp361-366 (2007), 2007