

## 1. Adatok

|                    |  |
|--------------------|--|
| Részvevők:         | Dr. Bácsó Sándor, tszv. egyetemi docens<br>Dr. Kozma László, tszv. egyetemi docens |
| Kutatóhely:        | Debreceni Egyetem<br>Informatikai Kar<br>Komputergeometriai Tanszék                |
| Futamidő:          | 2005-2008  |
| Támogatási összeg: | 4 millió Ft  |

## 2. Az elért eredmények rövid ismertetése

A beszámolási időszakban a munkatervnek megfelelően egyrészt a Finsler geometria lokális összefüggéseivel, a speciális Finsler terekkel, a projektív leképezések tulajdonságaival foglalkoztunk, másrészt globális Riemann geometriai eredmények Finsler terekre vonatkozó általánosításával. A munka eredményeként 17 tudományos dolgozat született, ebből megjelent 13, 1 elfogadva megjelenés előtt, 1 benyújtva, és 2 előkészület alatt van. 19 alkalommal tartottunk előadásokat, – részben meghívott előadóként – nemzetközi differenciálgeometriai konferenciákon, többségében külföldön. Egy alkalommal, 2007-ben mi rendeztünk workshop jellegű nemzetközi egy hetes találkozót Balatonföldváron, ahová 13 országból 45 résztvevő jött el előadni és megvitatni a Finsler geometria legújabb problémáit. A kutatásokba bevontunk fiatalokat is, doktorandusz hallgatókat, többen társszerzőként szerepelnek a publikációknál, 2 doktori (PhD) védés is történt az időszak alatt. A kutatásokat részben külföldi szerzőtársakkal együtt végeztük (Csehország, Kína, Japán, Románia, Irán). Az OTKA támogatása igen nagymértékben hozzájárult ahhoz, hogy egyrészt a kutatásokat zavartalanul, eredményesen, és a külföldi kutatókkal együttműködve tudjuk végezni, eredményeinket nemzetközi konferenciákon ismertethettük, és külföldi vendégeket tudtunk Debrecenbe meghívni, a vezető kutatók és a doktoranduszok is közvetlen bekapcsolódhattak a nemzetközi közös kutatásokba.

## 3. Az elért eredmények részletes ismertetése

1. Bácsó Sándor – Szilasi Zoltán: Notes on the representational possibilities of projective quadrics, *Teaching Mathematics and Computer Science*, 4/1 (2006), 167–177.

Ebben a munkában megadtuk a négydimenziós euklideszi és projektív térben a másodrendű felületek osztályozását, továbbá kidolgoztuk néhány esetben a felületek ábrázolási lehetőségét a Maurin-féle és az axonometrikus eljárásokkal.

2. Bácsó Sándor – Xinyue Cheng: Finsler conformal transformations and the curvature invariances, *Publicationes Mathematicae (Debrecen)*, 70 (2007), 221-231., 2007

A dolgozatban a Finsler terek konform transzformációinak vizsgálata mellett eredményeket kaptunk a Riemann görbületek, a Ricci görbületek, a Landsberg görbületek és az S-görbületek viselkedésére. Részletesen tárgyaltuk azokat a konform transzformációkat, amelyek megőrzik a fenti görbületeket.

3. László Kozma – Ioan Radu Peter: Weinstein's theorem for Finsler manifolds, *Mathematical Journal of Kyoto*, 46-2, 2006

A dolgozatban Finsler sokaságokra általánosítjuk az ismert nevezetes Weinsten eredményt, mely szerint irányítható kompakt sokaság izometriájának mindig van fixpontja, feltéve hogy páros dimenzió esetén az izometria megőrzi az irányítást.

4. László Kozma – Ioan Radu Peter – Hideo Shimada: On the twisted product of Finsler manifolds, *Reports on Mathematical Physics*, 57 (2006), 375-383.

A "twisted" szorzat fogalmát kiterjesztjük Finsler terekre, és bemutatjuk a szorzattér kovariáns deriválásának a faktorterek kovariáns deriválásával való kapcsolatát, illetve ugyanezt a geodetikusok esetében.

5. Bácsó Sándor – Xinyue Cheng – Zhongmin Shen: Curvature properties of (alpha, beta) metrics, *Advances Studied in Pure Mathematics*, 48, 73-110., 2007

A Finsler geometriában és a hozzá kapcsolódó alkalmazásokban fontos szerepet játszanak az úgynevezett (alfa, béta)-metrikák. Rendkívül érdekesek a görbületi tulajdonságaik, amelyeket a jelen cikkben ismertetünk és továbbfejlesztjük az eddigi vizsgálatokat. A kapott új eredményeket is megfogalmaztuk ebben a munkában.

6. L. Kozma: On Randers spaces, *Bull. Soc. Sci. Lett. Lodz Ser. Rech. Deform.* 51, 91-99., 2006.

Áttekintő jelentő dolgozat, a Randers terek, különösen a konstans zászlógörbületű Randers terek osztályozásával kapcsolatos aktuális fejlemények összefoglalása.

7. L. Kozma: Semisprays and nonlinear connections in Lagrange spaces, *Bull. Soc. Sci. Lett. Lodz Ser. Rech. Deform.* 49, 27-34., 2006.

A dolgozat egy készülő tanulmánykötet egyik fejezete: bemutatja Lagrange terek esetén a nemlineáris konnexiók értelmezési lehetőségeit, és tulajdonságait.

8. L. Kozma: Finslerian Weyl structures in the tangent bundle, *Bull. Soc. Sci. Lett. Lodz Ser. Rech. Deform.* 49, 19-26., 2006.

A konform struktúrával ellátott, ún. Finsler-Weyl terekben a konnexió bevezetésnek két módját írjuk le, és elemezzük kapcsolatait.

9. J. Mikes - S. Bácsó - V. Berezovski: Geodesic mappings of weakly Berwald spaces and Berwald spaces onto Riemannian spaces, In. J. Pure Math. 45, (2008), 413-418.

Ebben a cikkben szükséges és elegendő feltételt adtunk arra nézve, hogy egy Berwald tér mikor rendelkezik közös geodetikussal egy Riemann térrel. A cikk megjelenése után rögvest továbbfejlesztette eredményünket V. Matveev. (V. Matveev, Riemannian metrics havind the same geodesics with Berwald metrics, Publ. Math. Debrecen, megjelenés alatt.)

10. S. Bácsó – Z. Szilasi: On the direction independence of two remarkable Finsler tensors, Proc. Conf. Diff Geom Appl. World Scientific, 2008, 397-403.

Ebben a cikkben a csak helytől függő Lagrange es stretch tenzorok tulajdonságait vizsgáltuk. Az utóbbi években intenzívebbé váltak azok a kutatások, amelyek csak a helytől függő Finsler tenzorok vizsgálatával foglalkoznak. Ebben a munkában két csak helytől függő tenzor (Landsberg és stretch tenzorok) tulajdonságait vizsgáltuk és megállapítottuk, hogy ha a Landsberg és a stretch tenzorok csak a helytől függnnek akkor ezek azonosan zérusok.

11. T. Aikou – L. Kozma: Global aspects of Finsler geometry, Handbook of Global Analysis, Elsevier, (eds. Demeter Krupka and David Saundres), 1-40. 2007

Az áttekintő jellegű mű összefoglalja a Finsler geometria aktuális kérdéseinek állapotát.

12. S. Bácsó – B. Szilágyi: On the rectilinear extremals of geodesics in SOL, Acta Math. Acad. Pedagog. Nyházi. (N:S:) 24(2008), 25-31. Megmutattuk, hogy nem léteznek a SOL geometriában egyenesvonalú geodetikussok. A bizonyításban a SOL metrikát Finsler metrikának tekintettük, és az igazoláshoz Finsler geometriai módszereket alkalmaztunk.

13. S. Bácsó, Z. Szilasi, p-Berwald manifolds, Publ. Math. Debrecen, 74(2009), megjelenés alatt.

Ebben a publikációban egy új speciális Finsler teret vezettünk be, az ugynevezett p-Berwald tereket, amelyeket az jellemez.hogy a Berwald tenzor indikátrixra való projekciója zérust eredményez. Megmutattuk, hogy a három vagy annál magasabb dimenziós p-Berwald terek gyengén Berwald Douglas sokaságok. A főskalárt tartalmazó differenciálegyenlettel sikerült jellemezni a két-dimenziós p-Berwald tereket. Ebből a differenciálegyenletből látható, hogy a két-dimenziós p-Berwald terek különböznek a Berwald terektől. Végül megmutattuk, hogy a p-Berwald terek akkor és csak akkor R-quadratic típusuak, ha stretch tenzoruk eltűnik.

14. S. Bácsó, B Rezaei, On R-quadratic Einstein Finsler space, Publ. Math. Debrecen (közlésre benyújtva).

R-quadratic Finsler terek azok a terek, amelyekben a Berwald-féle görbületi tenzor csak a hely függvénye (S. Bácsó, M. Matsumoto, 1999; Z. Shen, 2001).

Megállapítottuk, hogy egy nem-zéró Ricci skalérral rendelkező R-quadratic Einstein Finsler tér Riemann tér. Vizsgáltuk az R-quadratic Einstein terek projektív kapcsolatait. Annak szükséges és elegendő feltételét is megadtuk, amikor R-quadratic Einstein térnek egy másik ugyanilyen térrel közös a geodetikusaik.

15. S. Bácsó, Z. Szilasi, Some remarks on the projective theory of Finslerian sprays, (kéziratban, 13 oldal).

A vizsgálatok célja az volt, hogy keressünk olyan speciális Finsler terek közötti projektív kapcsolatokat, amelyeknél a projektív faktor csak a hely függvénye. Ezeket elsősorban a Finsler terek Randers-féle projektív kapcsolataiban találtuk meg.

#### 4. Publikációk listája

1. Bácsó Sándor – Szilasi Zoltán: Notes on the representational possibilities of projective quadrics, Teaching Mathematics and Computer Science, 4/1 (2006), 167–177.
2. L. Kozma: Finslerian Weyl structures in the tangent bundle, Bull. Soc. Sci. Lett. Lodz Ser. Rech. Deform. 49, 19-26., 2006.
3. L. Kozma: On Randers spaces, Bull. Soc. Sci. Lett. Lodz Ser. Rech. Deform. 51, 91–99., 2006.
4. L. Kozma: Semisprays and nonlinear connections in Lagrange spaces, Bull. Soc. Sci. Lett. Lodz Ser. Rech. Deform. 49, 27-34., 2006.
5. László Kozma – Ioan Radu Peter: Weinstein's theorem for Finsler manifolds, Mathematical Journal of Kyoto, 46-2, 2006
6. László Kozma – Ioan Radu Peter – Hideo Shimada: On the twisted product of Finsler manifolds, Reports on Mathematical Physics, 57 (2006), 375-383.
7. Bácsó Sándor – Szilasi Zoltán: Generalised Rabl Mappings and Apollonius-Type Problems, Journal for Geometry and Graphics, 11, 27-38., 2007
8. Bácsó Sándor – Xinyue Cheng: Finsler conformal transformations and the curvature invariances, Publicationes Mathematicae (Debrecen), 70 (2007), 221-231., 2007
9. Bácsó Sándor – Xinyue Cheng – Zhongmin Shen: Curvature properties of (alpha, beta) metrics, Advances Studied in Pure Mathematics, 48, 73-110., 2007
10. T. Aikou – L. Kozma: Global aspects of Finsler geometry, Handbook of Global Analysis, Elsevier, (eds. Demeter Krupka and David Saundres), 1-40. 2007
11. S. Bácsó – B. Szilágyi: On the rectilinear extremals of geodesics in SOL, Acta Math. Acad. Pedagog. Nyházi. (N:S:) 24(2008), 25-31.

12. J. Mikes - S. Bácsó - V. Berezovski: Geodesic mappings of weakly Berwald spaces and Berwald spaces onto Riemannian spaces, In. J. Pure Math. 45, (2008), 413-418.
13. S. Bácsó – Z. Szilasi: On the direction independence of two remarkable Finsler tensors, Proc. Conf. Diff Geom Appl. World Scientific, 2008, 397-403.
14. S. Bácsó – Z. Kovács: On the Randers change of Landsberg spaces, előkészületben, 2008
15. S. Bácsó – Z. Szilasi: p-Berwald manifolds, Publ. Math. Debrecen (megjelenés alatt), 2008
16. S. Bácsó – Z. Szilasi: Some remarks on the projective theory of Finslerian sprays, előkészületben, 2008
17. S. Bácsó – B. Rezaie: On R-quadratic Einstein-Finsler space, Publ. Math. Debrecen (közlésre benyújtva), 2008

## 5. Előadások listája

1. Bácsó Sándor: „Differential Geometry and Physics” nemzetközi konferencián (Budapest, 2005. aug. 29-szept.4.) „Weakly-Berwald spaces” címmel
2. Bácsó Sándor: A „Konstruktive Geometrie” nemzetközi konferencián (Balatonföldvár, 2005. szept.5-9.) „On a new rectifiability condition of a second order ordinary differential equation (geometrical interpretation)” címmel
3. Kozma László: On isometries of Finsler manifolds, Int. Conf. on Geometry and Physics, Budapest, 2005. aug. 29 -szept.4
4. Kozma László: The Y-linear connection of M. Matsumoto, 50 minute talk presented at the 40th Symposium on Finsler Geometry, dedicated to the memory of Professor Makoto Matsumoto, Sapporo, Hokkaido Tokai University, September 8, 2005.
5. Kozma László: Busemann hyperbolicity in Finsler geometry, 30 minutes talk presented at the Mini-workshop on Finsler geometry, Kagoshima University, Kagoshima, October 15, 2005.
6. Bácsó Sándor: Hajós Szeminárium (ELTE), 2006. február 16. About the rectificationability of solution of second order differential equations.
7. Bácsó Sándor: China. Chongqing, 2006. június 26.,Chongqing Technical University Projective Finsler Geometry I
8. Bácsó Sándor: China, Chongqing, 2006. június 28., South-West University, Chongqing Projective Finsler Geometry II
9. Bácsó Sándor: China, Xiamen, Conference on Finsler Geometry, 2006. július 15-18. On a new special Finsler space

10. Kozma László: On Randers spaces, 50 minutes talk at Workshop on Finsler Geometry and Quaternionic Structures, Bedlewo, Poland, July 18-25, 2006.
11. Kozma László: On isometries of Finsler manifolds, 50 minute plenary talk, International Scientific Conference, „Finsler extensions of Relativity Theory”, 4-10 November, 2006, Cairo, Egypt
12. Bácsó Sándor: On the Weyl tensor depending on the position only, Workshop on Finsler Geometry and Its Applications, May 28-June 2, 2007, Balatonföldvár.
13. Bácsó Sándor: Douglas spaces and some tensors depending on position alone in Finsler spaces, International Symposium On Riemann-Finsler Geometry at Hangzhou (China), In memory of Prof. Shiing-shen Chern, July 15-19, 2007, plenáris előadás.
14. Bácsó Sándor: Douglas spaces, 10th International Conference on Differential Geometry and Its Applications, August 27-31, 2007, Olomouc, Czech Republic.
15. Kozma László: Sub-Finslerian geometry, Workshop on Finsler geometry and its Applications, Balatonföldvár, Hungary, May 28 - June 2, 2007
16. Kozma László: On isometries of Finsler manifolds, Colloquium on the occasion of D. Krupka's 60th birthday, Olomouc, Czech Republic, August 26, 2007.
17. Kozma László: Sub-Finslerian geometry, 10th International Conference on Differential Geometry and Its Applications, August 27-31, 2007, Olomouc, Czech Republic.
18. Bácsó Sándor:  $p$ -Berwald manifold. American Mathematical Society, Shanghai Mathematical Society, Joint Meeting, Fudan University, Shanghai, China, Dec. 17-21, 2008.
19. Kozma László: On isometries of Finsler manifolds, 50 minutes talk at Workshop on Finsler Geometry and Quaternionic Structures, Bedlewo, Poland, July 23-30, 2008

## 5. Egyebek

- *Ph.D disszertációk eredményes védeése:*

1. Xinyue Cheng: Geometric quantities and their meanings in Finsler geometry, 2005. november. (témavezető: Bácsó Sándor)
2. Papp Ildikó: Metrikus terek pályatartó leképezései, 2005. november. (témavezető: Bácsó Sándor)

- *Rendezett nemzetközi konferencia:*

A legjelentősebb esemény a Balatonföldváron rendezett 13 országból 45 résztvevővel megrendezett nemzetközi workshop jellegű konferencia, mely a Finsler geometria kutatások fontos csomópontja volt. Számos országból érkeztek régebbi együttműködők (Románia, Japán, Csehország), de több újabb kapcsolat, együttműködési lehetőség alakult ki (Irán, Oroszország). A konferencia szervezési költségeit, és a meghívott előadók költségeit részben az OTKA támogatásból fedeztük.