

Választási rendszerek matematikája: választókerületek kialakítása, mandátumszámítás és szavazás

Elért eredmények

A kutatási tervünk három területre irányult a szavazáselméletre, a mandátumszámításra és a választókerület-szabdalásra. Mivel a három közül a mandátumszámítás terén nem tudtunk publikációra érdemes eredménnyel előállni a záróbeszámolóban a másik két területen elért eredményeinket ismertetjük.

1. Szavazáselmélet

1.1. Neurális hálók alkalmazása a szavazási eljárások vizsgálatában

A szavazási paradoxonok és a közösségi döntések szavazáson keresztüli meghozatala miatt a szavazáselmélet egy máig népszerű kutatási terület. Az egyes szavazási eljárások mellett szólnak axiomatikus jellemzéseik és ellenük a különféle paradox viselkedésük. Borda és Condorcet több mint két évszázados vitája máig nyitott, mivel nem létezik az összes elvárható tulajdonságnak eleget tevő eljárás. Így többek között kialakultak a Borda-szavazást, a páronkénti többségi szavazást, vagy a jóváhagyó szavazást támogatók körei. Ezért a szavazási eljárások vizsgálatát más úton közelítjük meg (Burka és társai, 2016): az emberi agy működését „szimuláló” neurális hálókat kívánjuk felhasználni a szavazatok aggregálásához.

A Pythonban és C#-ban megírt programunk segítségével teszteltük, hogy a neurális háló (pontosabban az MLP-ét használtuk) képes a szavazási eljárásokkal támasztott két alapvető tulajdonság (egyhangúság és Pareto-dominancia) megtanulására. Ezek alapján arra a következtetésre jutottunk, hogy a neurális háló alkalmas eszköz szavazási eljárások vizsgálatára. A neurális hálót tanítottuk a Condorcet-győztesrel rendelkező profilok halmazán, az egyértelmű Borda-győztesrel rendelkező profilok halmazán, az egyértelmű többségi győztesrel rendelkező profilok halmazán, továbbá ezen esetek kombinációján is. Meglepő módon akármelyik tanulási halmazt is véve, a neurális háló választása egyértelműen a Borda-szavazáshoz esik a legközelebb. Ráadásul az eredmény robusztus a preferenciaprofilok generálásához alkalmazott eloszlásra: vizsgáltuk az input generálását úgynevezett IC (impartial culture), AIC (anonymous impartial culture) és a páronkénti összehasonlítások arányait tartalmazó mátrixok segítségével.

Mivel az MLP egy univerzális approximátor, a fenti eredmény árnyaltabban értelmezendő: ugyan a Borda-szavazásra tanul rá szokásos mintaméretek mellett, de kellően nagy mintaméret esetén a betanított eljárásra a Borda-szavazásnál jobban rá kell tanulnia az MLP-nek.

1.2. Szavazási eljárások optimalizációs problémák eredményeként

Szavazási eljárások kiválasztását optimalizációs problémák megoldásán keresztül, az 1970-es évek közepétől máig számos kutató vizsgálta. A legfrissebb, általános eredmény szerint megfelelő távolságfüggvény választásával bármelyik szavazási eljárás megkapható. A korábbi és az általunk alkalmazott megközelítés közötti lényegi különbség, hogy míg az előbbiek valamilyen kívánatos tulajdonsághoz minél közelebb kerülést célozták meg, a mi megközelítésünk a nem kívánatos, diktatórikustól keresi a legtávolabbit. Egy kézenfekvő metrika alkalmazása mellett kutatásunkban megmutattuk (Bednay, Moskalenko és Tasnádi, 2017), hogy a legközelebbi diktatórikus függvénytől legtávolabbi a kisebbségi választás (az az eljárás, amely a legkevesebbek által kedvelt alternatívát választja), míg az összes diktatórikus függvényhez egyidejűleg legközelebbi a többségi szavazás. Ezen kívül az összes diktatórikustól egyszerre legtávolabbi a kisebbségi választás, míg a legtávolabbi diktátorhoz legközelebb kerülő szabály a többségi szavazás. Ezzel egyfajta duális viszonyt azonosítottunk be a célfüggvények között.

A Gibbard-Satterthwaite-féle lehetetlenségi tétel szerint három vagy annál több alternatíva esetén nincsen diktátormentes és manipulációmentes (szürjektív) társadalmi választási függvény (TVF). A TVF-eket egyik kutatási irány szerint szokás a manipulálható profilok (preferencia n-esek) arányával jellemezni, amely szimulációs technikával határozható meg. A kutatásainkat folytatva a diktatórikus TVF-ektől vett távolságon keresztüli mérés lehetőségét elemeztük szimulációs módszerekkel és a két megközelítés eredményeit hasonlítottuk össze (Bednay, Moskalenko és Tasnádi, 2019). Mindkét index szerint az ismert, leggyakrabban alkalmazott TVE-ek közül a többségi (plurality) szabály teljesít a legrosszabbul, abban az értelemben, hogy egyben a legtöbb profilon manipulálható és a diktatórikushoz a legközelebb eső gyakran alkalmazott TVF. A legkevésbé manipulálható nevezetes TVF Copeland módszere, míg a diktatórikustól legtávolabbi a 2-jóváhagyó szavazás.

1.3. Parlamenti vesztegetés egyfajta modellje

A vesztegetés kérdését a parlamenti pártok számának függvényében vizsgáltuk (Bannikova és Tasnádi, 2015). Az országok ismertebb korrupciós indexeit alapul véve, azt tapasztaltuk, hogy azon országokban, amelyekben több parlamenti párt van, a korrupciós indexek a korrupció magasabb szintjére utalnak. A leíró statisztikai elemzésünk alapján egy egyszerűbb elméleti modellt is felállítottunk, amelyben a törvényhozás menetét befolyásoló külső „vesztegető” költsége pártonként, az egyes pártok képviselőinek számával arányos. Modellünkben rögzített

képviselőszám és pártok száma mellett a pártok közötti mandátumszám eloszlás egy széles tartományban mozoghat. A probléma kombinatorikai természetű és a vesztegetőnek a számítási bonyolultság szempontjából nehéz hátizsák problémára visszavezethető részproblémát is meg kell oldania a vesztegetendő képviselőhelyek számának minimalizálása során. Ezért saját készítésű számítógépes program segítségével határoztuk meg a vesztegető átlagos vesztegetési költségét 2-től 10-ig terjedő számú parlamenti pártok esetén. Numerikus számításaink alátámasztották, hogy a pártok számának növekedésével csökken a vesztegetés költsége, ami összhangban van empirikus megfigyeléseinkkel.

2. Választókerület-szabdalás

A választókerületek „igazságos” meghatározásának a kérdése a politikusok és az érdeklődő állampolgárok körében egy vitatott kérdés, mivel a választókerületek meghatározása jelentősen befolyásolhatja a választások kimenetelét. A kérdés a legutóbbi Magyar Országgyűlési Választás során jelentős közérdeklődésre tarthatott számot. A probléma egy objektívabb, legalább részleges megválaszolása csökkentheti a képviselők és a szavazók „igazságérzetét sértő” szabdalások mértékét, és „felesleges” politikai csatározásoktól kímélhetné meg a szereplőket. Mind elméleti, mind gyakorlati szempontból komoly kihívást jelent a pártos választókerület-szabdalást gátló objektív megközelítések kidolgozása. Az egy, illetve több fős választókerületekkel rendelkező választási rendszerekben a választókerületek újra-szabdalása állandó konfliktusforrás. Az újra-szabdalást a lakosság területi egységekenkénti eltérő növekedési üteme és a migráció teszi szükségessé. A választókerület-szabdalási problémára máig nem született elfogadható megoldás.

2.1. Normatív megközelítés

Az általunk alkalmazott axiomatikus modellkeretben megmutattuk (Puppe és Tasnádi, 2015), hogy a két-kerület determináltság (csak két kerületre osztandó terület esetén a döntetlen és egy párt győzelme között „konzisztensen” kell választanunk), a két-kerület egyenletesség (különböző két-kerületű problémákon az eljárásnak „hasonlóan” kell viselkednie), a közömbösség (csak az elnyert mandátumok száma a lényeges) és a konzisztencia (adott eljárást tekintve az egész problémára kapott szabdalás bármely részterületre is egy válaszható szabdalás) tulajdonságok együttes teljesülése a párt-optimális szabdalási eljáráshoz vezet úgynevezett kapcsolt földrajzokon. Ha még a pártsemlegesség axiómáját is hozzávesszük, akkor egy lehetetlenségi tételt kapunk. Eredményünk alátámasztja, hogy miért nem sikerült a választókerület-szabdalási problémát kielégítően megoldani.

2.2. Számítási bonyolultság

Sokan attól tartanak, hogy a számítógépes hardver és szoftver, továbbá a választókról rendelkezésre álló egyre pontosabb információ nem szabhat gátat egy úgynevezett pártos választókerület szabdalásnak („gerrymandering”). Altman és McDonald (2010) szerint a legmodernebb grafikus információs rendszereket használó szoftverek sem képesek egy párt számára a képviselőhely maximalizáló választókerület szabdalást meghatározni. A probléma számítástudományi bonyolultságára világított rá Altman (1997), valamint Puppe és Tasnádi (2009).

A korábbi bonyolultságelméleti eredmények nem vették explicite figyelembe a szavazók síkbeli elhelyezkedését. A kutatásunkban megmutattuk (Fleiner, Nagy és Tasnádi, 2017), hogy az optimális pártos választókerület-szabdalási probléma síkbarajzolható földrajzokra is NP-teljes. Elsőként polinomiális algoritmust is adtunk a probléma egydimenziós egyszerűsített változatára. Az NP-teljesség önmagában nem jelenti azt, hogy egy probléma kisebb méretű realiztikus inputokon megoldhatatlan. Polinomiok segítségével rámutatunk arra, hogy a „rajzolandó” választókerületek viszonylag kis száma ellenére a probléma gyakorlatilag megoldhatatlan, a rajzolható választókerületek nagy száma miatt.

A pártos választókerület-szabdalásnál hivatkozni szoktak az úgynevezett „crack and pack” eljárásra, amely segítségével könnyen illusztrálható, hogy egy párt hogyan szabdalhatja maga számára kedvezően a választókerületeket. Az eljárás lényege, hogy a szabdalást végrehajtó párt minimális szavazatokkal nyerő választókerületeket hoz létre, míg más választókerületekben a rivális párt támogatóit tömbösíti. Az optimális pártosválasztókerület-szabdalás meghatározása különböző modellkeretekben igazoltan NP-teljes, így ezekben a „crack and pack” eljárás sem adhat polinomiális idejű algoritmust $P \neq NP$ mellett. Konferenciaelőadásunkban (Tasnádi, 2019) megvizsgáltuk a „crack and pack” eljárásnak az optimális megoldást a közelítő tulajdonságát és modellkerettől függő hatékonyságát, másrészt tárgyaltuk a választókerület-szabdalási probléma modellkerettől függő közelíthetőségét. Földrajzi korlátok hiányában a „crack and pack” polinomiális, viszont Puppe és Tasnádi (2009) a földrajzi korlátokat implicite figyelembe vevő modellkeretében a nem polinomiális futás idejű „crack and pack” elven nyugvó eljárások a választókerület méret növekedésével egyre kevésbé közelítik a pártoptimális megoldásokat, pontosabban a közelítő megoldás relatív hibája 1-hez tart a legrosszabb esetben.

2.3. Választókerületek alakja

A gerrymandering a választókerületek politikai elfogultság szerinti átrajzolása. A választási körzetek létrehozatalakor az alak önálló kutatási téma, mivel az, hogy a körzetek határait pontosan hol húzzák meg, meghatározó lehet a pártok választási eredményeit illetően, ami közvetve jelentős gazdaságpolitikai következményekkel is járhat. Számos mérték létezik síkbeli alakzatok bizonyos tulajdonságainak leírására, de az ideális választókerület formát nehéz lenne meghatározni. Kutatásunkban a Hu invariáns momentumok segítségével egy új

körszerűségi mutatót alkalmazunk néhány amerikai választókerület alakjának és az időnként előforduló változtatások hatásának vizsgálatára, továbbá tárgyaljuk az általunk alkalmazott alakmutatókkal kapcsolatban felmerülő módszertani kérdéseket is. További célunk egy olyan eljárás létrehozása, amellyel a manipuláció szándéka hatékonyan kiszűrhető a választókerületek újra rajzolásánál.

Az e téren elért eredményeinket Nagy és Szakál (2019) tartalmazza. Egyrészt összehasonlítjuk néhány amerikai állam választókerületeinek az alakját. Másrészt bemutatjuk az alkalmazott alakmutatókat és tárgyaljuk az ezekkel kapcsolatos módszertani kérdések egy részét. Számos mérték létezik síkbeli alakzatok bizonyos tulajdonságainak leírására, ezzel szemben az ideális választókerület formát nehéz lenne meghatározni. Kutatásunkban a Hu invariáns momentumok segítségével egy új körszerűségi mutató-családot alkalmazunk néhány amerikai választókerület alakjának és a rendszeresen előforduló változtatások hatásának vizsgálatára, a bevezetett mutató különböző paraméterei mellett.

2.4. Gerrymandering hierarchikus választási rendszerekben

A jelöltek választása történhet többszintű választási rendszerekben. A tanácsrendszer elvileg ilyen szerkezetű. Nevezetesen a választókörzetek nyertesei választókerületekbe csoportosíthatók, majd ezen magasabb szintű választókerületekbe csoportosított első szintű nyertesek nyertesei még magasabb szintű választókerületekbe csoportosíthatók és így tovább, amíg el nem jutunk a legfelső törvényhozási szintig. A kutatásainkban (Kobayashi és Tasnádi, 2019) igazoltuk, hogy a szintek számának növelésével növekszik a választókerület-szabdalást végző párt hatalma, abban az értelemben, hogy egyre inkább a számára legkedvezőbb politikai beállítottságú választópolgár elnökké választását biztosíthatja alkalmas többszintű szabdalással (a pártok jelöltjei is választópolgárok).

Hivatkozások

- Altman, M. (1997): Is Automation the Answer? The Computational Complexity of Automated Redistricting. *Rutgers Computer and Law Technology Journal* 23: (1) 81-142.
- Altman M.; McDonald M. (2010): The promise and perils of computers in redistricting. *Duke Journal on Constitutional Law & Public Policy* 5, 69-112.
- Bannikova M.; Tasnádi A. (2015): Are parliaments with more parties cheaper to bribe?, Universitat Rovira i Virgili. Departament d'Economia, Documents de treball del Departament d'Economia, 2015-22.
- Bednay D., Moskalenko A., Tasnádi A. (2017): Does avoiding bad voting rules result in good ones? *Operations Research Letters* 45: (5), 448-451.

- Bednay, D; Moskalenko, A; Tasnádi, A (2019): Dictatorship versus manipulability. *Mathematical Social Sciences* 101: (1) 72-76.
- Burka D.; Puppe C.; Szepesváry L.; Tasnádi A. (2016): And the winner is ... Chevalier de Borda: Neural Networks would vote for the Borda count. 13th Meeting of the Society for Social Choice and Welfare, Lund, Sweden.
- Fleiner B., Nagy B., Tasnádi A. (2017): Optimal partisan districting on planar geographies. *Central European Journal of Operations Research* 25: (4) 879-888.
- Kobayashi K.; Tasnádi A. (2019): Gerrymandering in a hierarchical legislature. *Theory and Decision* 87: (2) 253-279.
- Nagy B.; Szakál Sz. (2019): Választókerületek alakjának vizsgálata HU-féle invariáns momentumok alkalmazásával. *Alkalmazott Matematikai Lapok* 36: (1) 161-183.
- Puppe C.; Tasnádi A. (2009): Optimal redistricting under geographical constraints: Why „pack and crack” does not work. *Economics Letters* 105: (1) 93-96.
- Puppe C.; Tasnádi A. (2015): Axiomatic districting. *Social Choice and Welfare* 44: (1), 31-50.
- Tasnádi A. (2019): Optimális pártos választókerület-szabdalás közelítése, XXXIII. Magyar Operációkutatási Konferencia, Szeged, 2019. május 20-22.

Budapest, 2020. január 30.

Tasnádi Attila
témavezető