**Záró beszámoló az NN-102 029-es számú OTKA pályázat keretében elért eredményekről**

**Témavezető: Pach János**

A pályázat 4 éve alatt elért eredményeket több mint 70 cikkben publikáltuk. Ebben az összefoglalóban - terjedelmi okok miatt - nem térhetünk ki minden eredményre, ezért csak a legfontosabbakat ismertetjük.

Nem tartozik a tudományos eredmények közé, de megemlítjük, hogy - részben a pályázat által támogatott kutatások elismeréseként - a témavezetőt az ACM (Association fór Computing Machinery) és az Academia Europaea tagjai közé választotta, valamint meghívott előadó volt a Matematikusok Nemzetközi Kongresszusén Szöulban.

Pach János a pályázat témájában elért eredményei közül 5-öt emelünk ki.

1. Keszegh Balázzsal és Pálvölgyi Dömötörrel közösen megoldották Dujmovic, Eppstein, Suderman és Wood régi problémáját (melynek elintézése a pályázat egyik fő célkitűzése volt). Bebizonyították, hogy minden d természetes számhoz van egy olyan f(d) szám, hogy bármely síkgráf, melyben minden csúcs foka legfeljebb d, lerajzolható a síkban úgy, hogy élei egymást nem metsző egyenes szakaszok, és az élek dőlésszögeinek száma legfeljebb f(d). Azt is belátták, hogy ha az élek egyszer megtörhetnek, akkor 2d különböző dőlésszög elegendő. *(SIAM J. Discrete Math. 2013).*

2. Tardos Gáborral közösen megoldották az epszilon-hálók elméletének egyik legrégebbi nyitott kérdését. Haussler és Welzl klasszikus 1987-ben publikált eredménye szerint, minden d>l egészhez van olyan c(d) konstans, hogy bármely d Vapnyik-Cservonyenkisz dimenziós H halmazrendszerben minden epszilon>0 számra található legfeljebb (c(d)/epszilon)log(l/epszilon) méretű *epszilon-háló,* tehát választható legfeljebb ennyi pont, hogy a halmazrendszer bármely olyan halmazában, amely az alaphalmaz elemeinek legalább epszilon-részét tartalmazza, van választott pont. A témavezető és Gerhard Woeginger 25 éve belátták, hogy ebben az eredményben a logaritmikus faktorra szükség van, de az általánosan elfogadott (és Matousek, Seidel, valamint Welzl által 1990-ben konkrétan kimondott) sejtés szerint a "geometriai módon definiált" hipergráfok esetén a logaritmikus factor elhagyható. Ismert volt például, hogy minden olyan hipergáfban, melynek élei megkaphatóak egy 3-dimenziós térbeli ponthalmaz félterekkel való metszeteiként, ez az állítás igaz. Pach es Tardos egyebek között belátták, hogy 4 (és magasabb) dimenzióban már szükség van a logaritmikus faktorra. Általánosabban: a Haussler-Welzl tétel semmilyen d>l esetén nem javítható még akkor sem, ha pusztán geometriai módon definiált halmazrendszerekre szorítkozunk. *(J. Amer. Math. Soc. 2013).*

3. Egy gráfot *k-kvázi-síkgráf*nak nevezünk, ha lerajzolható a síkban úgy, hogy az élei között nincs k páronként metsző. (Eszerint a definíció szerint a 2-kvázi-síkgráfok ugyanazok, mint a síkgráfok.) Régi alapkérdés, hogy minden k-ra van-e olyan c(k) konstans, hogy bármely n-csúcsú k-kvázi-síkgráfnak legfeljebb c(k)n éle van. Ha k=2, akkor ez következik Euler tételéből.

k=3 esetben Agarwal, Aronov, Pach, Pollack es Sharir bizonyították 1997-ben, k=4-re pedig Eyal Ackerman 2009-ben. Nagyobb k értékekre a probléma nyitott. A legjobb általános felső korlátot Jacob Foxnak és Pach Jánosnak sikerült bizonyítania: bármely n-csúcsú k-kvázi-síkráfnak legfeljebb c(k)n(logn)A{logk} éle lehet. Azt is belátták, hogy minden n-csúcsú "topológiai" gráfban (görbevonalú élekkel lerajzolt gráfban), melynek bármely két éle legfeljebb t-szer metszi egymást és melynek legalább nA{l+epszilon} éle van, található legalább nA{delta} páronként metsző él, ahol delta egy csakt-től es epszilontól függő pozitív konstans. *{Europecm J. Combinatorics 2012).* Régi megoldatlan probléma, hogy egy így lerajzolt teljes gráfban van-e mindig konstansszor n páronként metsző él.

4. Fejes Tóth László egy kérdése a témavezetőt 1980-ban a következő sejtés megfogalmazására inspirálta: minden síkbeli konvex K halmazra van olyan c=c(K)>0 egész, hogy a sík bármely K eltoltjaival való c-szeres fedése felbomlik 2 (egyszeres) fedésre. Ezt az állítást 1986-ban sikerült centrálszimmetrikus sokszögekre igazolnia. Később Tardos Gábor és Tóth Géza (2007) bizonyították háromszögekre, Pálvölgyi és Tóth (2010) pedig minden konvex sokszögre. Az utóbbi években a témakörben rengeteg új eredmény született (részben a pályázat résztvevőinek köszönhetően), melyeket Pach, Pálvölgyi és Tóth foglaltak össze egy nemrégiben megjelent áttekintő cikkükben (in: *Geometry - Intuitíve, Discrete, and Convex, Springer, 2013).* Nyitva maradt a legegyszerűbb kérdés: igaz-e az állítás, ha K egy körlemez? Mani és Pach egy több mint negyedszázados, publikálatlan kéziratának állítása szerint igen. Egy Pálvölgyi Dömötörrel közös cikkben ennek ellenkezőjét látják be! Az állítás ugyanakkor valóban igaz nem korlátos konvex halmazok esetén. (l/l/G *2015,* submitted).

5. A D-dimenziós tér azon pontjainak halmazát, melyek eleget tesznek legfeljebb t darab legfeljebb t-edfokú egyenlőtlenségnek vagy egyenlőségnek, egy (D és t paraméterű) *szemialgebrai* halmaznak nevezzük. Legyen H egy k-uniform hipergráf, melynek csúcsai megfeleltethetőek a d-dimenziós tér különböző pontjainak, élei pedig azon x_l,...,x_k pont-k-asoknak, melyekre (x_l,...,x_k) benne van egy rögzített (kd es t paraméterű) szemialgebrai halmazban. Ekkor H-t *szemialgebrai hipergráf*nak nevezzük. Jacob Fox, Mikhail Gromov, Vincent Lafforgue, Assaf Naor es Pach János bebizonyították Szemerédi regularitási lemmájának egy szemialgebrai hipergráfokra vonatkozó rendkívül erős változatát. Egy (P_l,...,P_k) halmaz-k-as (H hipergráfra nézve) *homogén,* ha akárhogy választunk ki minden PJ-ből egy xj elemet, az (x_l,...,x_k) pont-k-asok mindegyike vagy H-hoz tartozik, vagy egyikük sem tartozik H-hoz. Az új regularitási lemma szerint, minden d, t természetes számhoz és epszilon>0-hoz van olyan K=K(d,t,epszilon) egész, hogy bármely k>K esetén minden (d és t paraméterű) H szemialgebrai hipergráf csúcsai felbonthatóak k osztályra, melyek mérete legfeljebb 1-gyel különbözik, hogy - legfeljebb epszilon százalékuk kivételével - az osztály-k-asok mindegyike homogén. *(J. Reine Angew. Math. 2012).* Ennek a tételnek számos fontos geometriai alkalmazása van; Id. például Bárány Imre és Pach János egy közelmúltban megjelent cikket (*J. Combin. Theory Ser. B* 2014). További alkalmazásokhoz szükség van annak pontosabb becslésére, hogy a K konstans miként függ epszilontól és a d,t paraméterektől.

A következőkben először felsoroljuk a pályázatban részt vevő kutatók néhány további eredményét, amely a fenti 5 témához kapcsolódik , majd kitérünk egyéb eredményeikre.

1. **Gráfok egyenesvonalú lerajzolásai.** Padmini Mukkamala és Pálvölgyi Dömötör bebizonyították, hogy minden olyan gráf, melynek csúcsai legfeljebb 3-adfokúak lerajzolható a síkban egyenes élekkel (nem feltétlenül kereszteződések nélkül) úgy, hogy ezen élek iránya függőleges, vízszintes, +45 vagy -45 fokos (in: *Graph Drawing, LNCS* 2012).

   Az egyenesvonalú gráflerajzolások egy általánosítása a következő: egy G gráf *akadályokkal való reprezentáció*jában adott "akadályoknak" nevezett összefüggő halmazok egy rendszere a síkban. A csúcsokat pontok reprezentálják, és két csúcs között akkor fut G egy éle, ha a megfelelő pontokat összekötő szakasz nem metsz bele egyetlen akadályba sem. Jelölje o(G) az akadályok minimális számát G legjobb reprezentációjában. Nyilvánvaló, hogy o(G) legfeljebb n alatt a 2. Mukkamala, Pach és Pálvölgyi belátták, hogy vannak olyan n-csúcsú gráfok, melyekre o(G) > cn/logn. Itt c>0 egy abszolút konstans. (*Electron. J. Combin.* 2012). Nem ismert jó felső korlát o(G)-re, és azt sem tudjuk, hogy vannak-e olyan síkgráfok, melyekre o(G) tetszőlegesen nagy.

   Itt említünk egy magasabb dimenziós állítást is. Schur sejtette, hogy a d-dimenziós tér minden egységnyi átmérőjű n-elemű P ponthalmaza legfeljebb n olyan (d-1)- dimenziós szimplexet határoz meg, melynek minden oldala egységnyi hosszúságú. d=2 esetben ezt Hopf es Pannwitz igazoltak 1934-ben, d=3 esetben pedig Kupitz, Martini és Perles 2003-ban. Filip Móric és Pach belátták, hogy Schur sejtése igaz minden olyan P ponthalmazra, melyben igaz, hogy bármely két egységnyi oldalú (d- l)-dimenziós szimplexnek legalább d-2 közös csúcsa van, és azt sejtették, hogy ennek a feltételnek minden d-dimenziós ponthalmaz eleget tesz (*Comput. Geom.,* to appear). Nemrégiben Andrei Kupavskii bebizonyította ezt a sejtést, melyből a Schur sejtése azonnal következik. Kupitz, Martini es Perles eredményeit általánosítja Móric és Pach egy másik dolgozata is *{Beiträge Algebra Geom.* 2013).

2. **Epszilon-hálok, transzverzálisok.** Danzer es Rogers régi híres problémája a következő: legalább hány pontot kell venni az egységnégyzetben úgy, hogy bármely epszilon területű konvex nyílt halmaz tartalmazzon közülük legalább egyet? Elegendő konstansszor l/epszilon pont? Haussler és Welz fent említett tételéből, de explicit konstrukcióval is adódik hogy konstansszor (l/epszilon)log(l/epszilon) pont elegendő. Pach és Tardos bebizonyították, hogy ennyi pontra szükség is van, ha konvex halmazok helyett az összes epszilon-területű kvázi-téglalapot le szeretnénk fogni. Egy (delta paraméterű) *kvázi-téglalap* azon pontok halmaza, melyeket egy szakasz végigsöpör, ha azt önmagával párhuzamosan úgy mozgatjuk el, hogy a mozgás iránya sose térjen el a szakasz normálvektoranak irányától több mint delta fokkal. Itt delta egy fix konstans. (*J. Combin. TherySer. A* 2012.)

3. **Topológiai gráfok.** Conway híres gubanc (thrackle) sejtése szerint minden n-pontú *gubancnak* (olyan topológiai gráfnak, melynek bármely két éle vagy pontosan egyszer keresztezi egymást, vagy pedig ugyanabból a pontból indul ki és más metszéspontja nincs) legfeljebb n éle van. Pach, Rados Radoicic és Tóth Géza a következőképpen módosították a kérdést: nevezzünk egy topológiai gráfot *általánosított gubancnak* (tangled thrackle), ha az élpárokra egy harmadik lehetőséget is megengedünk: két él érintheti is egymást. Belátták, hogy ebben az esetben az élek száma legfeljebb n-szer logn egy hatványa. (*Geombinatorics* 2011.) Azt sejtették, hogy ez a korlát 0(n)-re javítható. Ezt nemrégiben Andres Ruiz Vargasnak, Andrew Suknak és Tóth Csabának sikerült igazolnia (2014).

Egy topológiai gráfot *egyszerű*nek neveznek, ha bármely két éle legfeljebb egyszer metszi egymást. Fox, Pach és Suk sokkal jobb felső korlátot bizonyított n-csúcsú egyszerű k-kvázisíkgráfok élszámára, mint az általános esetben: (nlogn)2$^{A}${alpha(n)$^{A}$c(k)}, ahol alfa(n) az Ackermann függvény (rendkívül lassan növekedő) inverse. Ha azt is feltesszük, hogy a gráf minden élét x-monoton görbe reprezentálja, akkor ez a korlát tovább javítható 2$^{A}${c_k$^{A}$6)nlogn-re, ami egyenesvonalú élekkel rajzolt úgynevezett *geometriai gráfok e*setén is jobb, mint Valtr eddig ismert legjobb korlátja. *{SIAM J. Discrete Math.* 2013.)

Fülek es Ruiz-Vargas bebizonyították a témavezető és Tóth Géza sejtését, miszerint minden egyszerű teljes n-csúcsú topológiai gráfban van konstansszor n$^{A}${l/3} páronként diszjunkt él. (*Symp. Comput. Geom.* 2013.) A kitevőt később Ruiz-Vargas- nak sikerült majdnem *Vi-re* javítania, de az igazság akár 1 is lehet.

A topológiai gráfelméletben kiemelt szerepet játszik egy Turán Pál által bevezetett gráf-paraméter a *kereszteződési szám.* Egy G gráf keresztezési száma az a legkisebb szám, ahány kereszteződéssel a gráf lerajzolható a síkban. Síkgráfok esetén ez nyilván Pach és Tóth Géza bevezették a monoton kereszteződési gráf fogalmát, ami a fentitől annyiban különbözik, hogy csak olyan lerajzolásokat tekintünk, melyben minden él *x-monoton,* vagyis egy függőleges egyenessel való metszete vagy üres vagy egy pontból áll. Nagy irodalma van a *lineáris kereszteződési számnak,* ahol egyenesvonalú lerajzolásokra korlátozódunk. Bienstock és Dean egy 1993-as eredménye szerint a lineáris kereszteződési szám nem korlátozható felülről a kereszteződési szám semmilyen függvényével. Ezzel szemben Pach és Tóth megmutatta, hogy a monotone kereszteződési szám a kereszteződési szám négyzetének legfeljebb kétszerese. (*MoscowJ. Combin. Number Theory* 2012.) Tóth Gézának sikerült megjavítania a kereszteződési számra a *kereszteződő párok legkisebb* szórnának (pcr(G)) függvényében adott legjobb ismert felső korlátot. Az új korlát konstansszor pcr(G)$^{A}${7/4}log$^{A}${3/2}pcr(G). (in: *Thirty Essays in Geometric Graph Theory* 2013.)

Jan Kyncl, Pach, Radoicic és Tóth azt a kérdést vizsgálták, hogy minden egyszerű topológiai gráf kiegészíthető-e egyszerű teljes topológiai gráffá. Sikerült olyan n- pontú egyszerű topológiai gráfokat konstruálniuk, melyeknek csak O(n) élük van, de telítettek, abban az értelemben, hogy nem adható hozzájuk egyetlen él sem, amely minden korábbi élet 1-szer (vagy akár legfeljebb k-szor) metszene (ahol k egy rögzített egész szám). (*Comput. Geom.* 2015.)

4. **Többszörös fedések felbontása.** Keszegh Balázs és Pálvölgyi Dömötör bebizonyították, hogy ha a 3-dimenziós tér bármely részhalmazát legalább 12- szeresen lefedjük egy térnyolcad eltolt példányaival, akkor ez felbomlik 2 egyszeres fedésre. Ebből következik, hogy a sík bármely 12-szeres fedése egy háromszög *homotetikus* (vagyis párhuzamos helyzetű és hasonló) példányaival felbomlik 2 egyszeres fedésre. Ez az első pozitív eredmény, ami nem egy konvex halmaz eltoltjaira, hanem homotetikus példányaira vonatkozik. (*Comput. Geom.* 2014.)
   Kovács István nemrég belátta, hogy ez az eredmény nem általánosítható semmilyen 4-szög, 5-szög stb. homotetikus példányaira.

Keszegh és Pálvölgyi egy újabb dolgozatukban azt is belátták, hogy egy térnyolcadok eltoltjaival való elég sokszoros fedés felbomlik k darab fedésre. Következésképp minden k-ra van egy olyan m(k) természetes szám, hogy a sík minden m(k)-szoros fedése egy háromszög homotetikus példányaival felbomlik k fedésre. (Szintén *Comput. Geom.* 2014.) Utóbb az is kiderült, hogy m(k)=0(k)

5. **Szemialgebrai gráfok és hipergráfok**. Dávid Conlon, Jacob Fox, Pach, Benny Sudakov és Andrew Suk egy dolgozatukban azt vizsgálták, hogy módosulnak-e a klasszikus Ramsey-típusú kérdésekre adott válaszok, ha csak szemialgebrai gráfokkal és hipergráfokkal foglalkozunk. Pontosabban szólva, jelöljük RAk_{d,t}(n)-nel azt a legkisebb N egész számot, melyre minden d és t paraméterű k-uniform szemialgebrai H hipergráfnak van n olyan pontja, hogy az általuk feszített k-asok mindegyike vagy H- hoz tartozik, vagy egyikük sem tartozik H-hoz. A szerzők bebizonyították, hogy minden k>l eseten RAk_{d,t}(n) < twr_{k-l}(nAc), ahol c=c(k,d,t) egy alkalmas konstans. A twr_i(x) függvényt rekurzív módon definiáljuk: twr_l(x)=x, általában pedig twr_i(x)=2A{twr_{i-l}(x)}. Ez a korlát bizonyos szempontból optimális: minden k-hoz van olyan d=d(k) es t=t(k), amire RAk_{d,t}(n) > twr_{k-l}(c'n), egy alkalmas c'=c'(k) konstansra. Ez a korlát egy nagyságrenddel jobb, mint a megfelelő eredmények általános (nem feltétlenül szemialgebrai) hipergráfokra. Ennek a ténynek számos érdekes geometriai következménye van, pl. levezethető belőle a konvex sokszögekre vonatkozó Erdős-Szekeres tétel több nem-triviális általánosítása. (*Trans. Amer. Math. Soc.* 2014). A fenti eredmények megszületése óta eltelt időszakban körvonalazódni látszik egy új, *szemialgebrai kombinatorika,* melynek célja az extremális gráf- és hipergráfelmélet eredményeinek élesítése speciális, szemialgebrai gráfokra és hipergráfokra. Ez volt az egyik fő témája a témavezető előadása nak is a Matematikusok Nemzetközi Kongresszusán Szöulban. *(ICM* 2014.)

Végül kiemelünk néhány olyan eredményt, melyek közvetlenül nem sorolhatóak a fenti témakörök egyikébe sem.

Gábriel Nivasch, Pach és Tardos vizsgálták a következő problémát, amely egy térképjelölési kérdéssel kapcsolatos. Adott n nem átlátszó egységsugarú kör alakú lemez a síkon. Szeretnénk ezeket egy olyan sorrendben letenni a síkba, hogy kerületeik azon részének összhossza, amely felülről látható, maximális legyen. Ezt a paramétert a körrendszer *maximális látható kerületé*nek (mik) nevezzük. A szerzők megválaszolták a legérdekesebb ilyen irányú nyitott kérdést: igaz-e, hogy mik mindig legalább konstansszor n. A válasz tagadó, mégpedig egy nagyon erős értelemben: bármely körhalmazra, melynek középpontjai "sűrűn" helyezkednek el (vagyis úgy, hogy a halmaz átmérőjének és a minimális távolságnak az aránya 0($n^{A}${l/2}), mlk=0($n^{A}${3/4}). (*Comput. Geom.* 2014.)

A sík halmazainak egy családja szeparál egy P ponthalmazt, ha P bármely 2 pontjához található a családban egy olyan halmaz, amelyik az egyiket tartalmazza, a másikat pedig nem. Gerbner Dániel és Tóth Géza megmutatták, hogy a sík bármely általános helyzetű, n-elemű ponthalmazát lehet 0(nloglogn/logn) konvex halmazzal szeparálni. Ez a korlát a loglogn-es tagtól eltekintve pontos. (*Comput. Geom.* 2013.)

Adott egy általános helyzetű n-elemű P ponthalmaz a síkban, melyhez szeretnénk találni egy olyan töröttvonalat, amely mindegyikükön áthalad, és közben szeretnénk minimalizálni a töréspontok számát. Nem követeljük meg, hogy a töröttvonal szakaszai diszjunktak legyenek. Triviális, hogy n-1 töréspont mindig elegendő, legalább n/2-re pedig mindig szükség van. Adrián Dumitrescu, Gerbner Dániel, Keszegh Balázs és Tóth Csaba olyan ponthalmazokat konstruáltak, hogy minden rajtuk átmenő töröttvonalnak legalább n/2 + cnlogn pontja van, ahol c>0 egy abszolút konstans. (*Discrete Comput. Geom.* 2014.)

Károlyi Gyula és Tóth Géza azt kutatták, hogy miképp változik az Erdős-Szekeres problémára adott válasz, ha olyan síkbeli ponthalmazok vizsgálatára szorítkozunk, ami nem tartalmaz valamilyen tiltott rendtípusú T konfigurációt. Vagyis mi az a legkisebb F=F_T(n) szám, amire igaz, hogy a sík bármely F-elemű T-mentes ponthalmazából kiválasztható egy konvex n-szög n csúcsa. Ha T egy olyan rendtípus, melyben a pontok konvex burka egy háromszög, csak háromféle válasz lehetséges: F_T(n) n-tól lineárisan, polinomiálisan vagy exponenciálisan függ. *(Discrete Comput. Geom.* 2012).

Barát János egy Dujmovic-csal, Joret-vel és másokkal közös cikkében egy olyan kérdést vizsgáltak, amely szintén kapcsolatos az Erdős-Szekeres tétellel. Bebizonyították, hogy a sík minden legalább 328n$^{A}$2-elemű ponthalmazában vagy van 5 pont, melyek egy konvex ötszöget alkotnak, melynek belsejében nincs pont, vagy pedig van n kollineáris pont. A legjobb előző korlát n-ben duplán exponenciális volt. (*SIAMJ. Discrete Math.* 2015.)