

Zárójelentés a K-100473 nyilvántartási számú
**Kölcsönható részecskerendszerek skálázott limeszei:
fluktuációk, határeloszlások, hidrodinamikai limeszek**
című OTKA pályázatról

2017. november 19.

Bevezető

A támogatási időszak során a kutatócsoport összetétele és munkakörülményei jelentősen megváltoztak. Az egyik szenior résztvevő (Fritz József) 2013. év során nyugdíjba vonult és attól kezdődően kutatási aktivitásának intenzitása nagyon lényegesen lecsökkent. A pályázat vezető kutatója (Tóth Bálint) 2012. őszétől munkaidejének felét külföldön, a University of Bristol matematika tanszékén tölti. Egy másik szenior kutató (Balázs Márton) 2013. szeptemberében kivándorolt Angliába és azóta teljes munkaidejét a University of Bristol matematika tanszékén tölti. E változások következtében az elnyert OTKA-támogatásnak csupán alig több mint felét tudtuk felhasználni. Viszont mindezek dacára kutatási terveinket nagyrészt teljesítettük.

Kölcsönható részecskerendszerek fluktuációi és hidrodinamikai limeszei

Egy mean-field modell kölcsönható bolyongásokra. Egymással kölcsönható bolyongók viselkedése nagyon bonyolult lehet. Hogy a problémát kezelni tudjuk, egy olyan modellt vizsgáltunk, ahol véges számú bolyongó nem közvetlenül egymással, hanem a rendszer tömegközéppontjával hat kölcsön. A kölcsönhatás vonzó jellegű, így a bolyongók nem távolodnak el nagyon messzire egymástól. A folyamat alkalmas lehet sokféle egymást vonzó vagy egymással versenyző biológiai, társadalmi vagy gazdasági szereplő (pl. állatcsordák, kereskedelmi egységek, tőzsdei árfolyamok) modellezésére. A [4] cikkünkben a rendszer tömegközéppontból nézett stacionárius eloszlásait, majd skálalimeszeit vizsgáltuk. Bebizonyítottuk, hogy a bolyongók empirikus sűrűsége egy hidrodinamikai egyenlet megoldásához tart, ahogy egyre többet adunk belőlük a rendszerbe. A hidrodinamikai egyenlet bizonyos megoldásait felírtuk a folyamat néhány konkrét változatában.

Függő duplán elágazó-és-kioltó bolyongók. Egy elágazó-és-kioltó és közben bolyongást végző sokrészecske-rendszerről megmutattuk, hogy az egyrészecskés állapot rekurrens. A modellünkhöz hasonló rendszerek általában nehezen kezelhetők, hagyományos technikákon túl egyedi ötletek szükségesek. Az [5] cikkben A. Sturm és J.M. Swart módszereire építettünk, de azokat kiterjesztettük arra az esetre amikor a részecskék hosszú távú kölcsönhatással mozognak.

Lökéshullámok és ritkulási hullámok egymás mellett. Egy olyan egydimenziós részecskerendszert vizsgáltunk [3], melyben a hidrodinamikai viselkedést meghatározó hidrodinamikai fluxus se nem konvex, se nem konkáv. Ennek érdekes következményei lettek a hidrodinamikai egyenletben, melyeket részecskerendszerekben korábban nem dokumentáltak. Mi egy teljes és meglehetősen érdekes képet adunk az egyenlet Riemann kezdőfeltételű megoldásairól.

Hogyan indítsuk a másodosztályú részecskét? Egydimenziós részecskerendszerek ritkulási hullám megoldásaiban a másodosztályú részecske viselkedése eddig csak néhány esetben volt ismert [Ferrari, Kipnis: *AIHP* (1995)]. A [2] cikkben egy széles model családra írjuk le ezt a jelenséget, és ezzel régóta nyitott kérdéseket válaszolunk meg. A bizonyítás a másodosztályú részecske speciális kezdeti eloszlásán alapul, melyet meglepő módon egy előjeles mértékből építünk fel. Az előző bekezdésben részletezett esetben a hidrodinamikai egyenlet furcsa megoldásokat produkál, melyek a másodosztályú részecske mozgását érdekesen alakítják, a határeloszlásban folytonos és diszkrét komponenseket is találunk.

Blokkoló eloszlások és a Jacobi-féle hármasszorzat formula. Az aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat reverzibilis, ú.n. blokkoló eloszlásai régóta ismertek. Az [1] cikkben általánosan leírjuk a mizantróp folyamatok hasonló blokkoló eloszlásait. A szintén jól ismert kizárásos folyamat/*zero range* folyamat kapcsolatból a blokkoló mértékeiken keresztül egy mérőben újfajta bizonyítást adunk a Jacobi-féle hármasszorzat formulára. A bizonyításban fontos szerephez jut a számegyenes eltoláscsoportja.

Hosszú memóriájú bolyongások és diffúziók

Öntaszító bolyongások és diffúziók. A [37], [40] és [28] cikkekben olyan bolyongásokat és diffúziókat vizsgáltunk, amelyek időbeli fejlődését saját múltbeli trajektóriájuk oly módon befolyásolja, hogy igyekeznek elkerülni azokat a tartományokat, ahol a múltban már több időt töltöttek. Matematikai nyelven: a lokális idejük negatív gradiense hajtja őket. [37] és [40] cikkekben azt bizonyítjuk, hogy 1-, illetve 2- dimenzióban e mozgások *szuperdiffúzívak*, azaz, az elmozdulásuk gyorsabb, mint a standard $\sqrt{t}$. Ezzel szemben 3 és magasabb dimenzióban $\sqrt{t}$ skálázású, azaz, diffúzív centrális határeloszlás-tétel érvényes. Ezt bizonyítottuk a [28] cikkben. Ezek az eredmények együttesen a 80-as évek eleje óta nyitott fizikus sejtéseket igazolnak.

Véletlen közegű bolyongás divergencia-mentes drift-mezőben. Olyan véletlen közegű bolyongásokat és diffúziókat vizsgáltunk, amelyeknek a lokális driftje divergencia-mentes vektor-mező. Ez jól modellezi az inkompresszibilis turbulens áramban sodródó apró részecskék mozgását. A [29] cikkben egy nevezetes, a 80-as évek óta lényegében nyitott problémát tisztáztunk véglegesen. Azt bizonyítottuk, hogy a véletlen drift-mező korrelációinak lecsengésére vonatkozó ú.n. H_{-1} -feltétel elégséges a diffúzív centrális határeloszlás-tétel bizonyításához. A bizonyítás lényeges eleme a [27] cikkben belátott ú.n. *relaxált szektor feltétel*. Ezzel szemben, ha a fentebb említett H_{-1} -feltétel nem teljesül, akkor szuperdiffúzív viselkedés várható. Erre jó példa a [40] cikk egyik eredménye, ahol azt bizonyítjuk, hogy a 2-dimenziós szabad Gauss-mező rotációja által hajtott diffúzió szuper-diffúzív.

Vonzás és taszítás versenye. Az [15] és [16] cikkekben olyan hosszú memóriájú bolyongásokat vizsgálunk, amelyeknek a trajektória menti kölcsönhatása taszító és vonzó erők keveréke. E

két hatás versengése következtében nagyon érdekes, újszerű és matematikailag nehezen megragadható jelenségek jelentkeznek. A [15] cikkben egy valós paraméterrel jellemezzük e két hatás versenyét és a paraméter szerinti gazdag fázisdiagrammot azonosítunk. A paraméter egyes értéktartományaiban nagyon eltérő globális viselkedést írunk le. Ezek nagyrészt fenomenologikus és fizikai érvelésen alapuló sejtések. A [16] cikkben a paraméter egyik értéktartományában bizonyítunk matematikailag szigorú állítást a bolyongás erős lokalizációjáról.

Periodikus Lorentz-gáz Boltzmann-Grad limeszben. A [30] cikkben a periodikus Lorentz-gázt vizsgáltuk az ú.n. Boltzmann-Grad limeszben. Ez az a határátmenet, amikor a Lorentz-gáz rögzített szóró magjainak sűrűsége végtelenhez nő, ugyanakkor a kölcsönhatások sugara nullához csökken oly módon, hogy a szórótestek között tévelygő részecske ütközések közötti szabad úthossza konstans nagyságrendű marad. Azt láttuk be, hogy ebben a határátmenetben a Lorentz-gáz részecskéje marginálisan szuperdiffúzív minden dimenzióban.

Korrelált perkoláció és kapcsolódó modellek

A valószínűségszámítás azon rész-területét, amely a d -dimenziós $\mathbb{Z}^d$ rács véletlen részhalmazainak összefüggőségi tulajdonságaival foglalkozik, *perkolációelméletnek* nevezzük. Természetes az olyan perkolációs modellek vizsgálata, amelyekben (a klasszikus Bernoulli-perkolációs modelttől eltérően) a különböző csúcsokat egymással korrelált módon távolítjuk el. Kutatásunk fókuszában az ú.n. erősen korrelált perkolációs modellek állnak. Ezen modellek markánsan különböznek a klasszikus Bernoulli-perkolációtól, így a tulajdonságaik vizsgálatához új módszerek szükségesek (pl. dekorrelációs egyenlőtlenségek, „multi-scale” renormalizáció).

Ilyen korrelált perkolációs modellre példa a [Sznitman, *Ann. Math.*, 2010]-ben definiált *random interlacement* (véletlen gubanc) modell, ami a d -dimenziós ($d \geq 3$) rács egy olyan véletlen $\mathcal{I}^u$ részhalmaza, amely mindkét irányban végtelen bolyongás-trajektóriák egy felhője által meglátogatott csúcsokból áll. A modell $u > 0$ paramétere a felhő sűrűségét méri. Az $\mathcal{I}^u$ halmazt, valamint a $\mathcal{V}^u$ komplementer-halmazt vizsgáljuk.

A [10] könyvünk a modell alapvető eredményeibe és módszereibe ad betekintést. Ilyen eredmény a $\mathcal{V}^u$ halmaz nemtriviális perkolációs fázisátmenete: ha u kellően kicsi, akkor $\mathcal{V}^u$ tartalmaz végtelen összefüggő komponenst, viszont ha u kellően nagy, akkor $\mathcal{V}^u$ minden komponense véges nagyságú. A [10] könyv elkészítésekor ezt az eredményt csak a hasznos, mindazonáltal technikás dekorrelációs egyenlőtlenségek felhasználásával tudtuk bizonyítani, ám nem sokkal később a [33] cikkben rövid és elemi bizonyítást adunk a $\mathcal{V}^u$ halmaz nemtriviális perkolációs fázisátmenetére.

A [11] cikkünk azt bizonyítja, hogy ha $\mathcal{V}^u$ sűrűsége elég nagy, akkor a $\mathcal{V}^u$ halmaz végtelen összefüggő komponense lokálisan is egyértelmű, azaz, a véges nagyságú komponensek „kicsik”. A [12] cikkben ezen lokális egyértelműségi tulajdonság felhasználásával bizonyítjuk, hogy a végtelen összefüggő komponens geometriája aszimptotikusan hasonló $\mathbb{Z}^d$ geometriájához. A [12] eredményei a véletlen gubanc modellnél általánosabb korrelált modellekre is kiterjednek.

Ezen modellek közül egy a *Gaussian free field (GFF)*. A [32] cikkünk eredménye szerint a d -dimenziós GFF színhalmazai nagyon erős dekorrelációs egyenlőtlenségeket elégítenek ki, annak dacára, hogy a model polinomiálisan korrelált. A bizonyítás sokkal rövidebb, mint a véletlen gubanc modellbeli analóg állításé, lásd [Teixeira, Popov, *JEMS*, 2015].

A [35] cikk témája a *voter model*, egy Markov folyamat, aminek állapottere a $\mathbb{Z}^d$ rácson értelmezett 0-1 konfigurációkból áll. Szemléletesen minden csúcs egy szavazó, aki két párt (0 és 1) közül választhat. A szavazók időről időre megváltoztatják a pártpreferenciájukat, az R

lépésnyire ülő szavazók közül az egyik véleményét véve át. Ha $d \geq 3$, akkor a voter model-nek minden $0 < \alpha < 1$ -hez pontosan egy olyan extrémális stacionárius eloszlása van, amiben az 1-esek sűrűsége α . Az [35] cikkben az 1-es pártra szavazókból álló véletlen csúcshalmaz nem-triviális perkolációs fázisátmenetét bizonyítjuk a $d \geq 5$, $R \geq 1$ és a $d \geq 3$, $R \gg 1$ esetekben. Ezzel részlegesen megválaszoltunk egy Joel Lebowitz által felvetett nyitott kérdést, de a $d = 3, 4$, $R = 1$ esetek még továbbra is nyitottak.

Önszerveződő kritikus gráf-modellek

Az önszerveződő kritikus viselkedés statisztikus fizikai modelljei azzal a céllal lettek megalkotva, hogy a természetben spontán módon előforduló skála-független viselkedést modellezzék. Ilyen modellek például az *erdőtűz-modell* [Ráth, Tóth: *EJP* (2009)] és a *fagyott perkolációs modell* [Ráth: *Journ. Statist. Phys.* (2009)], melyek a dinamikus Erdős-Rényi gráf olyan módosításai, amelyben az élek egymástól függetlenül azonos rátával jelennek meg, és az összefüggő komponensek a nagyságukkal egyenesen arányos rátával törlődnek.

A [8] cikkünk az erdőtüz-modell egy fix csúcának összefüggő komponensét tekinti, es ezen komponens méretének időbeli fejlődésének aszimptotikus viselkedését írja le, amelyet a törlődést megelőző robbanásszerű növekvés jellemez.

A [31] cikk a fagyott perkolációs modell összeolvadási-törlődési folyamatának skálalimeszt írja le. Ehhez az [Aldous: *Ann. Prob* (1997)] cikkben definiált *multiplicative coalescent (MC)* folyamatot általánosítjuk oly módon, hogy a teapot *multiplicative coalescent with linear deletion (MCLD)* is rendelkezzen a Feller-tulajdonsággal a lehető legtágabb állapottéren: ezt a [34] cikkben bizonyítjuk. A [31] cikk fő eredménye az MCLD folyamat egy új reprezentációja, ami általánosítja [Broutin, Marckert: *Probab. Theory Rel. Fields* (2014)] egyik tételét oly módon, hogy az általánosítás nemcsak az MC, hanem az MCLD esetét is magába foglalja.

Véletlen mátrixok és Kardar-Parisi-Zhang univerzalitás

A KPZ univerzalitási osztályhoz kapcsolódó kutatásban célunk a természetben előforduló felület-növekedési folyamatok leírása sztochasztikus modellekkel. Ide tartozik a kristályok növekedése, a halmazállapot-változás illetve egy papírlap nedvességgel átjárt vagy elégett részének időbeli fejlődése. A fenti fizikai jelenségek minőségileg hasonló viselkedést mutatnak, amely a Kardar-Parisi-Zhang-egyenlettel írható le. Az utóbbi néhány évben sokat vizsgálták a KPZ-egyenletet, és ehhez kapcsolódó matematikai modelleket fejlesztettek ki. Ide tartoznak egyes kölcsönható részecskerendszerek, irányított polimermodellek, egymást nem metsző véletlen trajektóriák és kapcsolódó determinánsfolyamatok valamint egyes parkettázási problémák. A hosszú idő elteltével kialakuló (aszimptotikus) viselkedést határeloszlás-tételek formájában írjuk le, amelyek a vizsgált példáknál alátámasztják az univerzalitási sejtést, mely szerint ezekben a modellekben azonos skálázás mellett a határértékben fellépő eloszlások (pl. Tracy-Widom-eloszlás) a modellosztályra jellemzőek, és a véletlen mátrixok elméletéből ismertek.

A [18] cikkben az ú.n. *tacnode* folyamatot vizsgáltuk, amelyet egydimenziós független Brown-mozgások két nagy (végtelenhez tartó méretű) családjának segítségével állítottunk elő. Az azonos családbeli Brown-mozgások közös kezdőpontból indulnak és közös kezdőpontba érkeznek, és az összes trajektóriát arra kényszerítjük, hogy egymással ne érintkezzenek. A vizsgálat tárgya

a két család közötti határvonal közelében kialakuló eloszlás – bizonyos aszimptotika mellett. A kérdéskör természetesen merül fel a nagy véletlen mátrixok spektrumának vizsgálatakor.

A [17] cikkben a kölcsönható részecskerendszerek közül a teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat (TASEP) egyparaméteres általánosítását vizsgáltuk. A vizsgált q -TASEP modellben, ahol $q \in [0, 1)$ paraméter, a részecskék ugrási rátája a következő részecske előtti üres pozíciók számától függ. A t idő utáni részecskeáram $t^{1/3}$ skálázás mellett a véletlen mátrixok spektrumának vizsgálatakor fellépő Tracy-Widom-féle határeloszláshoz konvergál. A [41] cikkben a q -Hahn TASEP részecskerendszert vizsgáljuk, amely egy diszkrét idejű háromparaméteres modell. A részecskék ugrása párhuzamos frissítés mellett q -binomiális eloszlású. Ugró kezdeti feltétel mellett itt is Tracy-Widom-féle határeloszlást bizonyítunk. A fenti két eredmény megfelel a KPZ skálázási sejtés előrejelzésének.

A [7] cikkben explicit módon jellemeztük egy szemidiszkrét irányított véletlen polimermodell particiók függvényét. Ezzel olyan sztochasztikus folyamatokat állítottunk elő, amelyek bizonyos jól definiált (gyenge) értelemben a Kardar-Parisi-Zhang (KPZ) egyenlet időben stacionárius megoldásaiként értelmezhetők. Megadtuk a megoldás egydimenziós eloszlását, azaz, a kezdeti kétirányú Brown-mozgáshoz adódó véletlen eltolás eloszlását. A megoldás T idő utáni aszimptotikus viselkedése $T^{1/3}$ skálázás mellett megegyezik a korábban leírt modellekben (pl. teljesen aszimmetrikus egyszerű kizárásos folyamat, polinukleáris növekvő folyamat, last passage percolation) kapott határeloszlással.

A [9] cikkben egymást nem metsző négyzetes Bessel-folyamatok trajektóriája megfelelő skálázás esetén a tér 0 szintjével egy pont környezetében áll kölcsönhatásban. A határeloszlásként e környezetben fellépő pontfolyamatot írtuk le, az ún. *hard edge tacnode* folyamatot, amely a pozitív definit véletlen mátrixok spektrumának 0 körüli viselkedésével (hard edge of the spectrum) áll szoros kapcsolatban.

A [19] cikkben N egymást nem metsző Brown-mozgást kényszerítünk arra, hogy egy fix küszöb alatt maradjanak. A kritikus skálázás mellett, amikor a Brown-mozgások határalakja érinti a küszöböt, leírjuk annak az aszimptotikus valószínűségét, hogy a felső trajektória egy tetszőleges adott függvény alatt marad. Megadjuk továbbá a rendszer korrelációs függvényét.

Elméleti számítógéptudomány és sorbanállási rendszerek

Vizsgáltuk Kurtz klasszikus, Markov populációs modellek átlag-tér határértékére (mean field limit) vonatkozó eredményének kiterjesztését szemi-Markov populációs modellekre. Általános keretek között olyan kiterjesztéseket vizsgáltunk, amikben minden egyes egyed rendelkezik memóriával, ami a viselkedését nem-markovi módon befolyásolja. Két eltérő osztályra is bizonyítottuk, hogy tetszőleges véges időtávon a teljes folyamat konvergál egy determinisztikus határfolyamathoz; egyrészt általános eloszlású, nem megszakítható késleltetések esetén [21], másrészt determinisztikus, megszakítható késleltetések esetén [26]. Mindkét osztály esetén a átlag-tér határérték egy determinisztikus késleltetett differenciálegyenlet-rendszer megoldása, azaz, a sztochasztikus modellbe bevezetett „memória” megmarad a átlag-tér határértékben is. A határérték precíz matematikai bizonyítása mellett fontos az általános matematikai keret bevezetése és az is, hogy a megfelelő késleltetett differenciálegyenlet-rendszer a modelltől automatikusan felírható.

A fázis-típusú és mátrix-exponenciális eloszláscsalád közti különbség korábban is ismert volt (O’Cinneide karakterizációs tétel); erre adtunk egy új, elemi függvényvizsgálaton alapuló bizonyítást [25].

Vizsgáltuk továbbá a markovi modellezésben hasznos eloszláscsaládokat különböző gyakorlati szempontokból. Kerestünk koncentrált (determinisztikust jól közelítő) mátrix-exponenciális eloszlásokat [23], továbbá fázis típusú (phase-type) eloszlások kis méretű reprezentációit [24], harmadrendű diszkrét fázis típusú eloszlások kanonikus felírását [22], valamint egy teljesen gyakorlati problémát is: egy konkrét adatfeldolgozó rendszerbeli adatfolyamot modelleztünk Markov-lánccal [14]. Ezek az eredmények többnyire konferencia-kötetekben jelentek meg.

Egyéb, Markov-folyamatokkal kapcsolatos eredmények

Kártyakeverési eredmények. Bayer és Diaconis klasszikus eredménye [Bayer, Diaconis: *Ann. Appl. Probab.* (1992)] a Gilbert-Shannon-Reeds kártyakeverési modelltől azt vizsgálja, hogy hányszor kell egy pakli kártyát megkeverni, hogy jó közelítéssel teljesen véletlen sorrendet kapjunk. Conger és Howald ezt általánosítva [Conger, Howald: *Amer. Math. Monthly* (2010)] becsléseket adott két olyan – különböző – esetre, melyekben nem szükséges a kártyákat teljesen véletlen sorrendűre keverni. Az első eset azon alapul, hogy a játékosok több kártyát kapnak egyszerre, így a kapott kártyák egymás közti sorrendje nem fontos, ennek nem kell véletlennek lennie. A második elrendezésben a kártyák között vannak egyformák, azaz, egy több típusból álló ismétlődő halmazt kell véletlen sorrendbe állítanunk. A [6] cikkben azt vizsgáltuk, hogyan lehet ezt a két esetet kombinálni; ismétlődő kártyákat osztunk kezekbe. Összehasonlítottuk néhány jól ismert keverési módszer hatékonyságát, és egy új, az eddigieknél hatékonyabb keverési módszert is bemutatunk arra az esetre, ha kétféle kártya van a pakliban.

Elektromos hálózat nem reverzibilis Markov láncokhoz. A reverzibilis Markov láncokra jól ismert [Doyle, Snell: *Carus Math. Monographs* (1984)] elektromos áramkör analógiát terjesztettük ki a nemreverzibilis esetre. Ehhez egy új áramköri elemet használtunk, majd a kapott áramkörök tulajdonságait vizsgáltuk, és pár hasznos tételt általánosítottunk a reverzibilis esetről. Cikkünk az *American Mathematical Monthly*-ben megjelent meg [20], így nagyon széles olvasóközönséghez jut el.

Kipnis-Varadhan elmélet. A [27] cikkben [Varadhan *Ann. Inst. H. Poincaré* (1995)]-ben és [Sethuraman, Varadhan, Yau *Commun. Pure Appl. Math.* (2000)]-ben megfogalmazott ún. *szektor feltételeket* általánosítjuk messzemenően. Olyan funkcionálanalitikus feltételeket adunk a Markov-folyamat infinitezimális generátorára, ami biztosítja az additív funkcionálok martingál-közelítését és általánosabb körben alkalmazható, mint a Varadhan-féle feltételek. A *relaxált szektor feltétel* alkalmazásaira a fenti fejezetben adunk példákat. A [38] cikkben azt bizonyítjuk, hogy a viszonylag sokat idézett [Maxwell, Woodroffe *Ann. Probab.* (2000)] cikk fő eredménye a Kipnis-Varadhan gondolatkör [Tóth *Probab. Theory Rel. Fields* (1986)]-beli nem-reverzibilis általánosításának egyenes (és nagyon rövid úton belátható) következménye.

Rekordok életkora. A [36] cikkben folytonos és szimmetrikus lépéseloszlású bolyongásokat vizsgáltunk. Minden $k = 1, 2, \dots$ esetére megadtuk a k -edik leghosszabb ideig fennálló rekordnak a teljes időtartamból vett arányának univerzális aszimptotikus viselkedését, ill. annak a valószínűségnek a viselkedését, hogy a k -edik rekord pontosan az n -edik lépésben dől meg. Megmutattuk továbbá, hogy a rekordok fennállási idejeinek sorba rendezett arányai a Poisson–Dirichlet-eloszláshoz konvergálnak.

Hivatkozások

- [1] M. Balázs, R. Bowen: Product blocking measures and a particle system proof of the Jacobi triple product. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.* (2017, to appear)
- [2] M. Balázs, A.L. Nagy: How to initialize a second class particle? *Ann. Probab.* (2017, to appear)
- [3] M. Balázs, A.L. Nagy, B. Tóth, I. Tóth: Coexistence of shocks and rarefaction fans: Complex phase diagram of a simple hyperbolic particle system. *Journ. Statist. Phys.* **165**(1) (2016) 115-125
- [4] M. Balázs, M.Z. Rácz, B. Tóth: Modeling flocks and prices: Jumping particles with an attractive interaction. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.* **50**(2) 05 (2014) 425-454
- [5] M. Balázs, A.L. Nagy: Dependent double branching annihilating random walk. *Electron. J. Probab.* **20** no. 84 (2015) 1-32
- [6] M. Balázs, D.Z. Szabó: Comparing dealing methods with repeating cards. *ALEA Lat. Am. J. Probab. Math. Stat.* **11**(1) (2014) 615-630
- [7] A. Borodin, I. Corwin, P. Ferrari, B. Vető: Height fluctuations for the stationary KPZ equation. *Math. Phys. Anal. Geom.* **18** (2015) no. 1, 1–95
- [8] E. Crane, N. Freeman, B. Tóth: Cluster growth in the dynamical Erdős-ÁRényi process with forest fires. *Electr. J. of Prob.* **20** (101) (2015) 1-Å35
- [9] S. Delvaux, B. Vető: The hard edge tacnode process and the hard edge Pearcey process with non-intersecting squared Bessel paths. *Random Matrices Theory Appl.* **4** (2015) no. 2, 1550008
- [10] A. Drewitz, B. Ráth, A. Sapozhnikov: An Introduction to Random Interlacements. *SpringerBriefs in Mathematics* (2014)
- [11] A. Drewitz, B. Ráth, A. Sapozhnikov: Local percolative properties of the vacant set of random interlacements with small intensity. *Ann. de l'Institut Henri Poincaré.* **50**(4) (2014) 1165-1197
- [12] A. Drewitz, B. Ráth, A. Sapozhnikov: On chemical distances and shape theorems in percolation models with long-Å-range correlations. *J. of Math. Phys.* **55**, 083307 (2014)
- [13] L. Dumaz, B. Tóth: Marginal densities of the "true" self-repelling motion. *Stoch. Proc. Appl.* **123** (2013) 1454-1471
- [14] A. Egri, I. Horváth, F. Kovács, R. Molontay: Fingerprinting and reconstruction of functionals of discrete time Markov chains. *Analytical and Stochastic Modelling Techniques and Applications, 23rd International Conference, ASMTA, LNCS 9845*, Springer (2016) 140-154
- [15] A. Erschler, B. Tóth, W. Werner: Some locally self-interacting walks on the integers. In: *Probability in Complex Physical Systems* pp. 313-338, Springer, 2012.

- [16] A. Erschler, B. Tóth, W. Werner: Stuck walks. *Probab. Theory Rel. Fields* **154** (2012) 149-163
- [17] P.L. Ferrari, B. Vető: Tracy–Widom asymptotics for q-TASEP. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.* **51** (2015) no. 4, 1465–1485
- [18] P.L. Ferrari, B. Vető: Non-colliding Brownian bridges and the asymmetric tacnode process. *Electron. J. Probab.* **17** (2012) no. 44, 1–17
- [19] P.L. Ferrari, B. Vető: The hard-edge tacnode process for Brownian motion. [arXiv:1608.00394](#), submitted for publication
- [20] Á. Folly M. Balázs: An electric network for nonreversible markov chains. *The American Mathematical Monthly* **123**(7) (2016) 657-682
- [21] R. Hayden, I. Horváth, M. Telek: Mean field for performance models with generally distributed-timed transitions. *Proceedings of the 11th International Conference on Quantitative Evaluation of Systems, QEST, LNCS 8567* (2014) 90-105
- [22] I. Horváth, J. Papp, M. Telek: On the canonical representation of order 3 discrete phase type distributions. *Electronic Notes in Theoretical Computer Science* **318** (2015) 143-158
- [23] I. Horváth, O. Sáfár, M. Telek, B. Zámbo: Concentrated matrix exponential distributions. *Proceedings of EPEW 2016 - European Workshop on Performance Engineering* (2016) 18-31
- [24] I. Horváth, M. Telek: A heuristic procedure for compact Markov representation of phase-type distributions. *Proceedings of the 8th International Conference on Performance Evaluation Methodologies and Tools* (2014) 195-202
- [25] I. Horváth, M. Telek: A constructive proof of the phase-type characterization theorem. *Stochastic Models* **31/2** (2015) 316-350
- [26] I. Horváth, M. Telek: Mean field for performance models with deterministic delays and interrupts. *Performance Evaluation* **105** (2016) 1-21
- [27] I. Horváth, B. Tóth, B. Vető: Relaxed sector condition. *Bull. Inst. Math. Acad. Sin. (N.S.)* **7**: 463–476 (2012)
- [28] I. Horváth, B. Tóth, B. Vető: Diffusive limits for "true" (or myopic) self-avoiding random walks and self-repellent Brownian polymers in three and more dimensions *Probab. Theory Rel. Fields* **153** (2012) 691-726
- [29] G. Kozma, B. Tóth: Central limit theorem for random walks in doubly stochastic random environment: $\mathcal{H}_{-1}$ suffices. *Ann. Probab.* (2017, to appear)
- [30] J. Marklof, B. Tóth: Superdiffusion in the periodic Lorentz gas. *Commun. Math. Phys.* **347** (2016) 933-981
- [31] J. Martin, B. Ráth: Rigid representations of the multiplicative coalescent with linear deletion. (*submitted*)

- [32] S. Popov, B. Ráth: On decoupling inequalities and percolation of excursion sets of the Gaussian free field, *J. of Stat. Phys.* **159**(2) 312–320 (2015)
- [33] B. Ráth: A short proof of the phase transition for the vacant set of random interlacements. *Electron. Comm. Probab.* **20**(3) 1–11, (2015)
- [34] B. Ráth: Feller property of the multiplicative coalescent with linear deletion. (*submitted*)
- [35] B. Ráth, D. Valesin: Percolation on the stationary distributions of the voter model, *Ann. Probab.* (2017, to appear)
- [36] R. Szabó, B. Vető: Ages of records in random walks. *J. Stat. Phys.* **165** (2016) no. 6, 1086–1101
- [37] P. Tarrès, B. Tóth, B. Valkó: Diffusivity bounds for 1d Brownian polymers. *Ann. Probab.* **40** (2012) 695–713
- [38] B. Tóth: Comment on a theorem of M. Maxwell and M. Woodroffe. *Electr. Commun. Probab.* **18** (2013), paper no. 13, 1–4
- [39] Sz. Vajna, J. Kertész, B. Tóth: Modelling power-law distributed interevent times. *New Journal of Physics* **15**:10 (2013) paper no: 103023
- [40] B. Tóth, B. Valkó: Superdiffusive bounds on self-repellent Brownian polymers and diffusion in the curl of the Gaussian free field in $d=2$. *Journ. Statist. Phys.* **147** (2012) 113–131
- [41] B. Vető: Tracy–Widom limit of q -Hahn TASEP. *Electron. J. Probab.* **20** (2015) no. 102, 1–22