Szakmai zárójelentés az OTKA-100339 (2012. január 1 - 2016. június 30) pályázatról

A pályázati téma a korábbi OTKA-67580 (2017-2011) téma folytatása volt.

Az elmúlt 45 évben a diofantikus egyenletek elméletében rendkívül jelentős előrehaladás történt. Születtek igen általános, de ineffektiv végességi tételek; explicit felső korlátokat nyertek a megoldásszámra; effektív módszereket dolgoztak ki fontos egyenletosztályokra, melyek az összes megoldás megkeresését teszik elvileg lehetővé; olyan hatékony algoritmusokat is kidolgoztak, melyek bizonyos tipusú egyenletek esetén lehetővé teszik konkrét egyenletek összes megoldásának a tényleges megkeresését számítógép felhasználásával; végül a nyert módszereknek és eredményeknek számos fontos alkalmazása született, egyebek között az algebrai számelméletben, a rekurziv sorozatok elméletében és a diofantikus geometriában. Kutatócsoportunk az OTKA 100339 sz. pályázati támogatással mind az öt fő kutatási irányban, nemzetközi viszonylatban is igen jelentősnek minősített eredményeket ért el. Kutatásainkat a szerződésben megfogalmazott munkatervnek megfelelően végeztük. Eredményeinket 2 könyvben és 104 tudományos dolgozatban publikáltuk, és igen sok előadást tartottunk nemzetközi fórumokon.

Eredményes tudományos együttműködést folytattunk számos külföldi matematikussal. Munkáinknak jelentős a visszhangja, a publikációinkra való hivatkozások száma meghaladja az 5.000-et. Vizsgálatainkhoz sokan kapcsolódtak, eredményeinket, módszereinket sokan felhasználták kutatásaikban.

Tudományos eredményeinkért számos elismerésben részesültünk. Győry Kálmánt az Európai Akadémia (2016) és a Lengyel Művészeti és Tudományos Akadémia (2016) tagjává választotta, a Komáromi Selye János Egyetem pedig díszdoktorává avatta (2016). Pethő Attilát az MTA rendes tagjává (2010), az MTA Matematikai Tudományok Osztálya pedig ismételten (2014) osztályelnök helyettesévé választotta. Bérczes Attila benyújtotta (2016) az akadémiai doktori értekezését. A csoport vezető kutatói állandó meghívottjai és felkért előadói szakterületük nemzetközi konferenciáinak. 2015-ben felkérésre Debrecenben megrendezték Európa legnagyobb, legrangosabb nemzetközi számelméleti konferenciáját, a Journées Arithmétiques-ot.

Az OTKA 100339 sz. pályázat keretében végzett kutatások legfontosabb eredményeinek rövid összefoglalása

Számos jelentős effektív, kvantitatív és numerikus eredmény született egy sor alapvető fontosságú diofantikus problémával és alkalmazásaikkal kapcsolatban. Az alábbiakban ismertetjük a kutatócsoport tagjainak legfontosabb eredményeit. A közös eredményeket csak egyetlen helyen fogjuk megemlíteni. A legkiemelkedőbb eredményeket a rövid összefoglalóban is felsoroljuk.

GYŐRY KÁLMÁN eredményei: GYŐRY KÁLMÁN a projekt keretében 2 könyvet és 14 tudományos dolgozatot publikált, valamint egy kötetet szerkesztett.

Egységegyenletek. Az egységegyenletek, valamint különféle alkalmazásaik alapvető szerepet játszanak a számelméletben. Elméletük kidolgozásában a 70-es évektől kezdve GYŐRY úttörő szerepet töltött be. A kétismeretlenes estben ő nyerte az első effektív és kvantitatív végességi eredményeket, ő adott éles korlátot a megoldásszámra, és számos fontos alkalmazást publikált. Az elmúlt években *"Unit Equations in Diophantine Number Theory"* címmel Evertsevel közösen könyvet írt, mely 2015-ben jelent meg a Cambridge University Pressnél. A témakör első széleskörű, átfogó leírása mellett a könyv számos új, még nem publikált saját eredményt és alkalmazást is tartalmaz.

Diszkrimináns egyenletek. A 70-es évektől kezdve GYŐRY számos általános effektív végességi tételt nyert diszkrimináns egyenletekre, közöttük adott diszkriminánsú főpolinomokra, algebrai egészekre és alkalmazásként index forma egyenletekre és hatványegészbázisokra. Ezáltal több régi problémát oldott meg. A 80-as évektől Evertsével közösen fontos eredményeket publikáltak a nevezett egyenletek megoldásszámára, valamint adott diszkriminánsú binér fomákra. A vizsgálatokba igen sokan bekapcsolódtak. GYŐRY Evertsevel közösen a *„Discriminant Equations in Diophantine Number Theory”* című, a Cambridge University Pressnél 2016-ban megjelent könyvben az első átfogó tárgyalását adta a főként a szerzők által kidolgozott elméletnek. A könyvben sok új eredmény, valamint számos algebrai számelméleti, diofantikus approximációs és diofantikus geometriai alkalmazás található. A bizonyítások elsősorban a szerzők egységegyenletekre vonatkozó diofantikus eredményein alapszanak, melyeket a fentebb említett könyvükben foglaltak össze.

Effektív eredmények végesen generált tartományok felett. Az egységegyenletek mellett a Thue-egyenletek és a szuperelliptikus egyenletek is alapvető fontosságúak. A számtest esetben Thue, illetve Siegel, majd általánosabban Mahler, Parry, LeVeque és Lang bizonyították a nevezett egyenletek megoldásszámának a végességét. Ezek az eredmények azonban ineffektívek voltak. Számtest esetben ezekre később Baker, GYŐRY, Schinzel és Tijdeman adtak effektív bizonyítást. Újabban GYŐRY egységegyenletek és diszkrimináns egyenletek esetén Evertsevel, Thue és szuperelliptikus egyenletekre BÉRCZESSEL és Evertsevel közösen a lehető legáltalánosabb formában, Z felett végesen generált tartományok felett nyert effektív végességi tételeket. Kvantitatív formában nyert eredményei új fejezetet nyitottak a diofantikus számelméletben és számos alkalmazáshoz vezettek. Turán Pál születésének 100. évfordulója alkalmából 2011-ben Budapesten egy nagy nemzetközi konferenciára került sor. GYŐRY társszerkesztője a konferencia kötetnek. Továbbá felkérésre, Evertsevel közösen a kötet számára egy áttekintő cikket publikált végesen generált integritástartományok feletti diofantikus egyenletekre vonatkozó új, effektív eredményeiről. Ezen eredményeiről sikeres előadásokat is tartott több rangos nemzetközi rendezvényen.

Binom Thue egyenletek megoldása. Mély módszereket, köztük a híres moduláris módszert és a Baker-módszert kombinálva PINTÉRREL közösen számos binom Thue egyenletet teljesen megoldottak. Eredményüket sikerrel alkalmazták egy klasszikus problémára, számtani sorozatok tagjainak szorzatában található teljes hatványok megkeresésére.

Leszámláló polinomok egyenlő értékei. PINTÉRREL, KOVÁCCSAL és Péterrel közösen összefoglaló cikket írt standard leszámláló polinomok egyenlő értékeiről, melyben új eredményeket is publikált.

Többszörösen monogén számtestek. BÉRCZESSEL és Evertsevel közösen teljesen újszerű eredményeket nyertek többszörösen monogén A – orderekről, ahol A Z felett végesen generált és integrálisan zárt integritástartomány. Többek között megmutatták, hogy A hányadostestének véges fokú bővítésében legfeljebb véges sok 3-szorosan homogén A-order létezik. Eredményeiknek érdekes alkalmazását adták kanonikus számrendszerekre.

Aritmetikai gráfok. Az úgynevezett S-egység differencia gráfok rendkívül fontos szerepet játszanak a diofantikus egyenletek elméletében: ezek állnak többek között GYŐRY számos fontos, egységegyenletekre és széteső forma egyenletekre vonatkozó effektív végességi eredményének hátterében. GYŐRY és HAJDU, Tijdemannal együtt dolgozva megkezdte az ilyen típusú gráfok szisztematikus vizsgálatát. (Érdemes megemlíteni, hogy hasonló típusú gráfoknak, pl. a Cayley-gráfoknak nagy irodalma van.) Ennek eredményeként számos érdekes reprezentációs és végességi tétel született. Többek között kiderült, hogy minden gráf reprezentálható S-egység differencia gráfként, illetve hogy a minden S halmaz esetén reprezentálható gráfok éppen a jól ismert kocka gráfok (cubical graphs). A bizonyításokban az S-egység egyenletek effektív és ineffektív elmélete (köztük pl. GYŐRY számos mély tétele) mellett új, kombinatorikus hátterű gondolatmenetekre is szükség volt. Eredményeiket sikerült algebrai számtestek S-egységei esetén definiált differencia gráfokra is kiterjeszteniük. Abban a speciális, de fontos esetben amikor az alaphalmaz a racionális számok halmaza, Ruzsa egy korábbi cikkében több sejtést is megfogalmazott, pl. ciklusokra illetve indukált gráfokra vonatkozólag. Ezekkel a sejtésekkel kapcsolatban HAJDU társszerzőkkel (Custic, Kreso, Tijdeman) fontos eredményeket igazolt: megcáfolták és pontosították Ruzsa egy ciklusokra vonatkozó sejtését, illetve igazolták Ruzsa egy másik, indukált gráfokra vonatkozó sejtését.

PETHŐ ATTILA eredményei. PETHŐ Attila 2012 és 2016 között sikeres kutatásokat végzett polinomok statisztikus tulajdonságaival, a helyiértékes számábrázolás általánosításaival, lineáris formák approximációjával, korrelációs klaszterezéssel és kevés gyökkel rendelkező polinomok felbontásával kapcsolatban. 17 tudományos dolgozatot készített az OTKA pályázat támogatásával.

Akiyamával formulát bizonyítottak azon d-edfokú, s-szignatúrájú, normált polinomok együttható-vektorai halmazának mértékére, amelyek minden gyöke az egységkörbe esik. Belátták, hogy formulájuk s=0 esetben a Selberg integrált adja, s=1-ben pedig az Aomoto integrállal számítható. Megmutatták, hogy a totálisan valós polinomok aránya elenyészően kicsi és, hogy a különböző szignatúrájú tartományokat a diszkrimináns felület választja szét. Eredményeiket felhasználva aszimptotikus formulákat bizonyítottak - többek között - azon Pisot, illetve Salem polinomok számára, amelyek nyoma adott korlát alatt van. Bertókkal és HAJDUval hasonló eredményeket értek el abban az esetben, amikor a polinomok gyökei helyett az együtthatóit korlátozzuk. Ezzel lényegesen javították Dubickas egy eredményét.

Komornikkal - bizonyos feltételek mellett - megmutatták, hogy adott számjegyhalmaz és $1<p<q$ valós számok esetén kontinuum sok olyan szám létezik, amelyeket a p és a q alapszámmal ugyanazon számjegysorozat felhasználásával lehet felírni. Eredményeiket Pedicinivel kiegészülve általánosították több alapszámra is. Varga Péterrel általánosították a CNS polinomok fogalmát imaginárius másodfokú számtestek feletti polinomokra. Vele és Weitzerrel az SRS fogalmat is sikerült kiterjeszteni Hermite vektorterekre.

Pohsttal és Bertók Csanáddal olyan algoritmust fejlesztettek ki, amelyik egy algebrai számtest báziselemeinek jó szimultán approximációját számítja ki és periodikus. Az algoritmusuk a Lenstra. Lenstra, Lovász algoritmus egy dinamikus változata. Két dimenziós esetben, azaz valós másodfokú algebrai számokon elindítva visszaadja a Hurwitz-féle lánctörtalgoritmust.

Akiyamával és Evertsevel a majdnem lineáris rekurzív sorozatok tulajdonságait vizsgálták. Belátták, hogy ezekre is teljesül egy Binet-típusú formula. Aritmetikai tulajdonságaikat tekintve azonban másként viselkednek, mint a lrs-ok; például nem igaz rájuk a Skolem-Lech-Mahler tétel és még akkor is lehet végtelen sok közös tagjuk, ha van domináns gyökük. Megmutatták azt is, hogy vannak olyan lrs-ek, amelyeknek extrém nagy a fluktuációjuk, azaz abszolút értékben tetszőlegesen nagy és tetszőlegesen kis értéket is fel tudnak venni.

Aszalóssal, HAJDUval és részben Akiyamával a természetes számok korrelációs klaszterezését vizsgálták. Belátták, hogy egy mohó algoritmus nem szolgáltathat optimális klaszterezést; a páros számok osztályának a sűrűsége nem tarthat 1-hez. Ezzel szemben, ha S véges sok prímszám halmaza, akkor az S-egészek aszimptotikus optimális korrelációs klaszterezése egyetlen osztályból áll.

GAÁL ISTVÁN eredményei: GAÁL István 9 dolgozatot publikált az OTKA pályázat támogatásával.

Petrányival közösen meghatározták a minimális indexet és az összes minimális indexű elemet a legegyszerűbb negyedfokú testek végtelen parametrikus családjában. Korábban ezen számtestekről csak annyi volt ismeretes, hogy hatvány egész bázisuk csupán két speciális paraméter esetén létezik.

Szabóval közösen meghatározták a relatív hatvány egész bázisokat másodfokú számtestek bizonyos relatív negyedfokú bővítéseinek végtelen parametrikus családjaiban. Relatív hatvány egész bázisokra vonatkozóan korábban nem születtek eredmények végtelen parametrikus családokra. Remetével közösen negyedfokú gyökbővítések hatvány egész bázisainak generátorait határozták meg.

Remetével és Szabóval közösen a relatív Thue egyenletek „kis" megoldásainak kiszámítására konstruált algoritmust alkalmazták másodfokú résztestet tartalmazó hatodfokú számtestek hatvány egész bázisainak, valamint másodfokú számtestek feletti negyedfokú gyökbővítések relatív hatvány egész bázisainak kiszámítására.

Szabóval közösen kiszámították a relatív hatvány egész bázisok generátor elemeit tetszőleges képzetes másodfokú számtestek felett tekintett relatív negyedfokú bővítések végtelen parametrikus családjaiban. Remetével együtt bebizonyították, hogy a Gauss-féle számtest feletti negyedfokú gyökbővítések végtelen parametrikus családja nem monogén.

PINTÉR ÁKOS további eredményei: PINTÉR Ákos 17 tudományos dolgozatot publikált a pályázat keretében.

Bazsóval és Srivastavaval közös cikkükben a klasszikus Faulhaber tétel finomítását nyerték. Zieglerrel közösen a Fibonacci számok egy új karakterizációját adták, lényegében ez az egyetlen olyan másodrendű rekurzív sorozat, amely végtelen sok 3 tagú számtani sorozatot tartalmaz. Srivastavaval közösen elért, Bernoulli és Euler polinomokra vonatkozó addiciós tételeket terjesztettek ki Appel polinomokra.

Bilu, Fuchs és Luca társszerzőkkel közösen különböző kombinatorikus egyenleteket tanulmányozott és finomította a híres Bilu – Tichy tételt. Kim és Park társszerzőkkel poligonális számokhoz kötődő diofantikus egyenleteket oldott meg. TENGELY Szabolccsal közösen a KdV egyenlet soliton megoldásaihoz kapcsolódó diofantikus egyenletet vizsgált.

He-vel és Pinkkel közösen fontos eredményeket nyert a parametrikus $| x^2\text{-}cxy^2 + y^4 | \leq c+2$ egyenlőtlenség (x, y) egész megoldásairól. HAJDUVAL, TENGELLYEL és Vargával több jelentős effektív és numerikus eredményt nyert figurális számok közös értékeiről.

Benettel illetve Bo He és Togbéval közösen közelebb kerültek a szimultán Pell – egyenletek megoldásszámának pontos meghatározásához, ami nagy jelentőségű új eredmény. Módszerük a szimultán Baker tétel, továbbá a klasszikus komplex Baker - módszer újszerű alkalmazása.

HAJDU LAJOS további eredményei: HAJDU összesen 38 dolgozatot publikált a jelen pályázat keretében.

Exponenciális diofantikus egyenletek. Az exponenciális diofantikus egyenletek, illetve a kapcsolódó egység- és S-egység egyenletek elmélete a diofantikus egyenletek elméletének egy központi témaköre. Az inhomogén esetben, két ismeretlen esetén ismert, hogy egy ilyen típusú egyenletnek csak véges sok, effektív módon meghatározható megoldása van. Ha az ismeretlenek száma három vagy több, akkor nem ismert módszer az ismeretlenek korlátozására, csupán a megoldások számára. HAJDU, Bertók Csanáddal közösen, Skolem egy sejtésének általánosabb formájára vonatkozó részeredményeikre alapozva kidolgozott egy olyan újszerű, hatékony módszert, amely bizonyos standard feltételek mellett lehetővé teszi az említett típusú egyenletek összes megoldásának meghatározását tetszőleges ismeretlenszám mellett. Eredményeiket az algebrai számtest esetre is kiterjesztették, és a kidolgozott algoritmust implementálniuk is sikerült.

Az $1^k+\dots+x^k=y^n$ egyenletet számos matematikus vizsgálta. Schaffer egy klasszikus sejtése szerint az egyenlet csak bizonyos, régóta jól ismert megoldásokkal rendelkezik. Az irodalomban számos eredmény található, amely az egyenlet összes megoldását meghatározza, a k,x,y,n paraméterek közül bizonyosak rögzítése mellett. Például Bennett, GYŐRY, PINTÉR az egyenlet összes megoldását meghatározta $k<11$ esetén. HAJDU megmutatta, hogy ha x eleget tesz bizonyos oszthatósági feltételeknek (és minden további paraméter tetszőleges), akkor Schaffer sejtése igaz. Az irodalomban ez az első olyen jellegű eredmény, ahol az ismeretlenek egyikét sem kell rögzíteni. A bizonyítás során használt módszerek is újak: például az n kitevő korlátozása lokális megfontolások alapján történik. Később társszerzőkkel (BÉRCZES, Miyazaki, Pink) az egyenlet összes megoldását meghatározta $x<25$ esetén. Ez az eredmény is újszerű, a korábbi eredményekben k illetve n értékét rögzítették a szerzők.

HAJDU, Pink Istvánnal meghatározta az $1+2^a+x^b=y^n$ egyenlet összes megoldását, $x<50$ (a,b,y,n ismeretlen egész) esetén. A bizonyításban lokális módszerek és a Baker-módszer érdekes kombinálására volt szükség. Az eredmény lényegesen kiterjeszti több matematikus (pl. Bennett, Bugeaud, Mignotte) kapcsolódó eredményeit. A későbbiekben ezt az eredményt társszerzőkkel (BÉRCZES, Miyazaki, Pink) kiterjesztette az $1+x^a+z^b=y^n$ egyenletre, ahol $x,z<50$ különböző paritású egészek, és a,b,y,n ismeretlen egészek.

Egyéb diofantikus problémák. HAJDU több eredményt bizonyított egységek összegeként való reprezentációs kérdésekkel kapcsolatban. Tijdemannal megoldották Nathanson egy egész számok S-egészek összegeként való előállításával kapcsolatos problémáját, illetve annak általánosítását. Dombekkel és PETHŐvel több eredményt bizonyított algebrai számtestek egészei gyűrűinek egységek lineáris kombinációjával történő reprezentációjával kapcsolatban. Zieglerrel véges sok, explicit módon megadott kivételtől eltekintve meghatározták az összes olyan totálisan komplex negyedfokú algebrai számtestet, melyekben minden algebrai egész előállítható különböző egységek összegeként. Bertókkal, Sharmával és Lucával végességi tételeket adtak olyan számokra, melyek két többes alapú (multibase) számrendszerben is kevés nemnulla számjeggyel reprezentálhatók.

HAJDU társszerzőkkel (BÉRCZES, Dujella, Luca, TENGELY) több újszerű tételt igazolt diofantikus halmazokra vonatkozóan. Egyrészt vizsgálták azt az esetet, ahol az elemek eltolt szorzata különböző hatvány is lehet, másrészt végességi tételt adtak arra az esetre, amikor a klasszikus „eltolt szorzat” transzformációt tetszőleges kétváltozós polinommal helyettesítjük.

HAJDU BÉRCZESsel és Dujellával az S-egészek sorozatában fellépő hézagok pontos jellemzését nyerték. Eredményüknek több alkalmazását is adták.

HAJDU Bertókkal, Pinkkel és Rábaival több eredményt nyert rekurzív sorozatok összegeinek közös elemeivel kapcsolatban. Többek között meghatározták a $2^a+3^b+5^c$ alakú Fibonacci-számokat.

Rácsok és alkalmazásaik. HAJDU társszerzőkkel (Hajdu András és Tijdeman) a következő problémát vizsgálta: adott n-dimenziós véges ponthalmazhoz határozzuk meg a halmazt legjobban közelítő affin rácsot. A kérdésnek számos érdekes és fontos gyakorlati alkalmazása van, például az orvosi képfeldolgozás területén. A témakörben számos elméleti és gyakorlati eredményt nyertek. Többek között egy (az LLL algoritmuson alapuló) hatékony algoritmust szolgáltattak a probléma közelítő megoldására.

Egész számok legnagyobb közös osztóival kapcsolatos eredmények. HAJDU Lajos társszerzővel (Szikszai Márton) több eredményt is igazolt Pillai egy k egymást követő egész szám legnagyobb közös osztóira vonatkozó kérdésének Lucas- és általánosabb rekurzív sorozatokra való kiterjesztésével kapcsolatban. Többek között megmutatta, hogy bármely $k>24$ esetén található k darab egymást követő Fibonacci szám, melyek egyike sem relatív prím a többiek mindegyikéhez. Hasonló eredményeket nyert úgynevezett elliptikus oszthatósági sorozatok egymást követő tagjaira illetve asszociált Lucas-Lehmer sorozatokra vonatkozóan is. Eredményeik alkalmazásaként, Laishrammal effektív végességi tételeket nyertek Lucas-Lehmer sorozatok számtani sorozatot alkotó indexű tagjai szorzatainak hatványértékeivel kapcsolatban.

Prímszámokkal kapcsolatos problémák. HAJDU, Saradhával megválaszolva Balasubramanian egy kérdését végességi tételeket nyert olyan k számokra vonatkozóan, melyekre található k illetve phi(k) darab egymást követő prímszám, melyek teljes illetve redukált maradékrendszert alkotnak modulo k. Eredményeik más klasszikus kérdésekhez (Recaman illetve Pomerance problémája) is szorosan kapcsolódnak.

Diszkrét tomográfia. A diszkrét tomográfia alapproblémája: határozzuk meg egy bináris mátrix elemeit, pusztán a mátrix bizonyos vonalösszegeinek (például sor- és oszlopösszegeinek) ismeretében. Egy korábbi eredményükben HAJDU és Tijdeman megmutatták, hogy a kérdés tárgyalása során a probléma legrövidebb valós megoldása fontos szerepet játszik. HAJDU társszerzőkkel (van Dalen, Tijdeman) közösen újszerű, általános eredményeket nyert a legrövidebb megoldás előállításával kapcsolatban. Eredményeiknek több fontos alkalmazását is adták, például az azonos vonalösszegű mátrixok távolságára vonatkozóan. Az eredményeket arra a gyakorlati szempontból nagyon fontos esetre is kiterjesztették, amikor a mérési adatok pontatlanok. Ezen túl HAJDU és Tijdeman a vonalösszegek redundanciájával kapcsolatban is fontos eredményeket bizonyított.

Digitális képfeldolgozás. HAJDU Lajos társszerzőkkel (Hajdu András, Jónás Ágnes, Kovács László, Tomán Henrietta) különböző algebrai és egyéb eszközök felhasználásával igazolták egy újszerű kombinált rendszer hatékonyságát bizonyos típusú, orvosi jellegű képfeldolgozási problémák kezelésére.

Kriptográfia. HAJDU tásszerzőkkel (BÉRCZES, Hirata-Kohno, Kovács, PETHŐ) diofantikus egyenletek S-egész megoldásaira vonatkozó tételeken alapuló hash-függvényeket adtak meg. Eredményeik fontos kriptográfiai alkalmazásokhoz vezethetnek.

BÉRCZES ATTILA további eredményei: BÉRCZES összesen 17 dolgozatot közölt a pályázat keretében és benyújtotta az akadémiai doktori értekezését.

BÉRCZES legfontosabb eredményei. Effektív végességi eredményeket nyert végesen generált tartományok feletti görbéken található egységpontokra, ezzel effektív változatát bizonyítva S. Lang egy 1960-as nevezetes eredményének. Ez a tétel ebben az általánosságban az első effektív változata Lang említett eredményének. Ezt követően effektív végességi eredményeket bizonyított végesen generált tartományok feletti görbéken található divíziópontokra vonatkozóan, ezzel effektív változatát adva a híres Liardet-tételnek. Ebben az általánosságban a Liardet-tétel effektív változata korábban nem volt ismert. 2016-ban BÉRCZES benyújtotta MTA doktori disszertációját.

Egyébb diofantikus eredmények. Dujellával, HAJDUVAL és TENGELLYEL közösen a diofantikus m-esekre vonatkozó nevezetes probléma egy jelentős általánosítását vizsgálták Amikor diofantinkus m-eseket keresünk, akkor lényegében olyan halmazokat keresünk, melyek bármely két (x,y) eleme esetén xy+1 négyzetszám. Ezt a problémát abba az irányba általánosították, amikor az xy+1 helyett egy tetszőleges kétváltozós polinomot tekintünk, és leírták mindazon polinomokat, melyekre létezhet F-diofantikus halmaz.

TENGELY SZABOLCS további eredményei: TENGELY összesen 9 dolgozatot publikált a pályázat keretében.
Fontos új eredményeket nyert olyan Balancing számokról, melyek egymásra következő egészek szorzatai. Vargával közösen az Erdős-Graham probléma egy általánosításával foglalkozott. Erdős és Selfridge igazolta, hogy egymást követő pozitív egészek szorzata nem lehet teljes hatvány. Az eredmény alapján Erdős és Graham azt várta, hogy ez igaz lehet egymást követő pozitív egészek blokkjainak szorzatára is. Ulas talált ellenpéldát A problémakör így aktív kutatás célpontja lett, többen értek el szép eredményeket (Bauer, Bennett, Dujella, Luca, Saradha, Shorey, Van Luijk, Walsh). Blokkok hányadosai esetén vizsgálták a kérdést. TENGELYnek Vargával sikerült felső korlátot adni a megoldások méretére és numerikus eredményeket is nyertek.

HAJDU, Laishram és TENGELY az Erdős-Graham probléma egy additív verziójával kapcsolatban értek el új eredményeket. Erdős és Graham felvetették, hogy egymást követő egészek szorzataiból álló blokkokat összeszorozva (triviális esetektől eltekintve) nem kaphatunk négyzetszámot. Ennek egy additív megfogalmazása, amikor az ilyen blokkok összegét vizsgáljuk. A szerzők általános n-edik hatványokra vonatkozóan tekintették a problémát és nyertek végességi állításokat, bizonyos esetekben pedig numerikus eredményeket.

TENGELY és Ulas szintén a korábban említett Erdős-Graham problémával kapcsolatos új eredményeket értek el. Megmutatták néhány olyan esetben, amikor a blokkok hossza különböző, hogy a szorzat lehet négyzetszám és a megoldásokra létezik polinom alakban parametrizáció. Hasonlóan sikerült új eredményeket bizonyítaniuk, amikor a blokkok szorzata előáll két egymást követő egész szorzataként.

NYUL GÁBOR eredményei: NYUL Gábor 8 cikket publikált a pályázat keretén belül.
NYUL GÁBOR tanítványaival közösen több, rövid idő alatt számottevően hivatkozott eredményt ért el a Stirling- és a Bell-számok különböző általánosításaival és változataival kapcsolatban. Kereskényiné Balogh Zsófiával a Duncan és Peele által definiált, gráfokra vonatkozó másodfajú Stirling-számok és Bell-számok tulajdonságainak alapos vizsgálatát adták, melyek segítségével újszerű megközelítését kapták a másodfajú r-Stirling-számoknak és az r-Bell-számoknak is. Gyimesi Eszterrel megmutatták, hogy a Ramsey-elméletben fontos szerepet játszó kombinatorikus alterek számát a másodfajú r-Stirling-számok segítségével lehet leírni. Rácz Gabriellával pedig az r-Stirling-számokkal rokon r-Lah-számokat definiálták és végezték el tulajdonságaik teljeskörű vizsgálatát, egyúttal néhány új azonosságot igazolva az r-Stirling-számok esetére is. Részlegesen ehhez a témakörhöz kapcsolódik a debreceni Fazekas Mihály Gimnázium közelmúltban elhunyt, legendás matematikatanára, Szvetits Zoltán emlékére írt cikk, melyben a hatványösszegek egy elemi tárgyalását mutatták be.

Rauf Bettinával közösen tetszőleges rendű, konstans együtthatós lineáris rekurzív sorozatok van der Waerden-típusú számainak létezését vizsgálták, amely eredményt Bertók Csanáddal terjesztették ki, ezáltal megadva bizonyos feltételeket teljesítő, például a multibonacci sorozatok esetében a teljes választ.

Egy Gyimesi Eszterrel közös cikkben azt az érdekes észrevételt igazolták, hogy a racionális számok egységtörtek összegeként előállítására szolgáló Golomb-módszer és a lánctört módszer mindig ugyanazt a felbontást adja. Ezen túl sikerült a Nyul Balázzsal közösen vizsgált, kvaterniók és vektorok szorzásával kapcsolatos függvényegyenlet ún. pexiderizált változatának teljes megoldását megadni.

KOVÁCS TÜNDE további eredményei: KOVÁCS Tünde 7 dolgozatot publikált pályázati támogatással.

Rábai Zsolttal közösen piramidális számok egyenlő értékeivel kapcsolatos kérdéseket kezdtek el vizsgálni. A poligonális számok mellett a legalapvetőbb figurális számok a piramidális számok. Rögzített, különböző m,n értékre vizsgálták a Pyrm(x)= Pyrn(y) egyenletet.

Megmutatták, hogy minden (m,n) párra véges sok (x,y) megoldás van. Kis (m,n) paraméter értékek esetén a konkrét egyenletet meg is oldották.

Hirata-Kohno-val közösen, elliptikus görbék S-egész pontjainak meghatározásával foglalkoztak. Hirata-Kohno a közelmúltban bizonyított egy alsó korlátot a p-adikus elliptikus logaritmusokat tartalmazó lineáris formákra tetszőleges számú tag esetén. Az ő eredményét felhasználva, kiterjesztették a korábbi módszereket, mely által most már elméletben tetszőleges rangú elliptikus görbe tetszőleges S halmaz melletti S-egész pontjait meg lehet határozni. Példákon keresztül mutatták be a módszer hatékonyságát. Hirata-Kohno-val és Miyazakival közösen a $(x^n-1)/(x-1)=y^q$ alakú, ún. Nagell-Ljunggren egyenletet vizsgálták, ahol $x>1,y>1,n>2,q>1$ racionális egészek. Konkrétan, megmutatták, hogy az egyenletnek csak véges sok egész megoldása van, ha x egy teljes köb. Explicit felső korlátot adtak a megoldásokra.