Zárójelentés

A munkatervben 10 cikk megjelentetését irányoztuk elő. Ezzel szemben a kutatás során 23 folyóiratcikket írtunk és 35 előadást tartottunk a kutatás eredményeiről. A 23 folyóiratcikkből 18 már megjelent vagy közlésre elfogadták, 5 pedig benyújtásra került és jelenleg bírálat alatt van. A 18 cikkből 12 impakt faktoros folyóiratban került közlésre (összesítve 12,151 impakt faktorral). Tartalmi átfedések miatt a 35 előadás írásos anyagából csak 11 konferenciacikket és 9 absztraktot tüntettünk fel a publikációs jegyzékben. A vonatkozó publikációkra szögletes zárójelbe tett számokkal hivatkozunk. A számok a publikációs jegyzékben levő sorszámokat jelentik. Hat nagyobb területen folytattunk vizsgálatokat.

(1) Körelrendezések

(1.1) *Körök gömbsüvegen való elhelyezése*. A T46846 számú OTKA kutatásban vizsgálatokat kezdtünk n számú egybevágó kör változó nyílásszögű gömbsüvegen történő legsűrűbb elhelyezésére. A jelen kutatásban ezt a munkát folytattuk. Ha a nyílásszög nulla, akkor a probléma az n körnek egy adott körben való elhelyezésére vonatkozik. Ha a nyílásszög 360 fok, akkor a probléma az n körnek a teljes gömbön való elhelyezésére vonatkozik. A nyílásszögnek nullától 360 fokig terjedő változtatásával az elhelyezéseknek egy átmenetét kapjuk, melyben a síkbeli elhelyezéstől a gömbön való elhelyezésig jutunk. A számításokat az n=2,3,4,5,6,7,8 esetekre végeztük el. Megállapítható volt, hogy az elhelyezés sűrűsége a nyílásszög növelésével nem monoton növő. Az eredményekről Vorauban, a Conference on Geometry – Theory and Applications című rendezvényen tartottunk előadást [11].

A gömbsüvegen történő körelhelyezés speciális esete, amikor a köröket félgömbön helyezzük el. Ennek egyik gyakorlati alkalmazása a golflabdák mintázatkialakítása. Itt mintegy 60, kereskedelmi forgalomban kapható különböző golflabda részletes tanulmányozásával megállapítottuk, hogy a labdák milyen szimmetriacsoportot reprezentálnak, és az egyes mintázatok milyen analógiát mutatnak a geodetikus kupolák csomópont elrendeződésével. Az eredményeket a 2012. évi IASS szimpóziumon adtuk elő Szöulban, és folyóiratcikkben is publikáltuk [21].

(1.2) *Körelrendezések átmeneti problémája*. Az irodalomból ismert a következő geometriai probléma: n darab adott r sugarú körlapot úgy kell elhelyezni, hogy azok egy egységsugarú körlap minél nagyobb részét lefedjék. E probléma átmenetet képez a legsűrűbb körelhelyezés és a legritkább körfedés problémái között. Az optimális elhelyezések megkeresését helyettesítettük egy általánosított tensegrity szerkezet egyensúlyi helyzeteinek meghatározásával. Ez a szerkezet kötelekből, dúcelemekből és háromszögelemekből áll. E három elemtípusnak meghatároztuk az erősen nemlináris, sőt nem sima anyagegyenleteit, merevségeit, merevségi mátrixait. A javasolt eljárás használhatóságát az n=5 esetre részletesen bemutattuk. A körlapok sugarát „teherparaméternek" tekintve „egyensúlyi utak" határozhatók meg. Az egyensúlyi utak szakaszokra oszthatók az elrendezésekhez tartozó tensegrity szerkezet aktív elemei számának és/vagy típusának, valamint az egyensúlyi helyzet szimmetria viszonyainak különbözősége alapján. Kimutattuk, hogy az optimális elrendezéshez tartozó egyensúlyi út szakaszai között van D_5, C_1 és D_1 szimmetriával rendelkező szerkezethez tartozó is, sőt ez utóbbiban megkülönböztettünk „tojás" és „dinnye" alakokat is. Az egyensúlyi utak elágazásai között van elfajult típusú kettőscsúcs katasztrófapont, stabilis szimmetrikus elágazás és olyan elágazás is, amelynél a merevségi mátrix sajátértéke éppen ugrik, tehát nem sima e pontban a „potenciális energia" függvénye. Az algoritmust és az 5 kör esetén létrejövő egyensúlyi utak egyes részeit Párizsban a Numerikus mechanika IV. európai konferenciáján [1] és Budapesten a Bolyai János halálának

150-ik évfordulója emlékére rendezett konferencián [2] ismertettük, valamint két folyóiratcikkben tettük közzé [31, 32].

A körelrendezések átmeneti problémája különleges esetekkel is szolgál. Az általánosan javasolt eljárást az n = 3, 4, 6, és 7 esetre részletesen kidolgoztuk. n=3 esetén az optimális elhelyezés és fedés típusa megegyezik, sőt az átmeneti szakaszon is a D_3 szimmetriájú elrendezés az optimális. n=4 esetén az optimális elhelyezés és fedés típusa megegyezik, de az átmeneti szakasznak csak egy részén optimális a D_4 szimmetriájú elrendezés. Egy kritikus pontban elágazik az egyensúlyi út, és a továbbiakban az optimális elrendezés D_2 szimmetriájú. n=6 esetén bonyolultabb a helyzet, mint a korábban vizsgált n=5 eset volt. Az optimális elhelyezésre két lényegében is eltérő elrendezést kaptunk és ezek szimmetriatípusa (D_5 és D_6) eltér az optimális fedés típusától (D_1). Előfordult, hogy egyensúlyi út helyett „fatörzs”-szerű egyensúlyi halmaz adódott, amellyel eddig még nem találkoztunk. n=7 esetén még az n=3 eseténél is egyszerűbb utat kaptuk, mely szintén egy stabilis ágból áll, de itt a tensegrity szerkezet aktív elemei sem változtak. Az algoritmust és a 6 kör esetén létrejövő egyensúlyi utak legfontosabb részeit ismertettük Miskolcon a XI. Magyar Mechanikai Konferencián [6].

(1.3) *Lótusz receptákulumok.* A lótusz receptákuluma egy csúcsával lefelé álló körkúp, amelynek körlapjába ágyazva, egy-egy cellában helyezkednek a közel azonos méretű gömbölyded magok. Olyan ez a konfiguráció, mintha egy azonos területű cellákból álló, kétdimenziós szappanhab celláiba egy-egy azonos méretű körlapot helyeznénk; és valamilyen kompromisszum árán egyesítenénk az n azonos területű cellából álló, minimális energiájú kétdimenziós szappanhab alakját és az n egyforma kör legsűrűbb körbeli elhelyezésének alakját. A megválaszolandó kérdés, hogy hogyan kombinálható e két feladat. A vizsgálathoz közel kétszáz, 3–32 magot tartalmazó száraz receptákulumot gyűjtöttünk be, melyekről fényképeket készítettünk. A receptákulumok fényképein manuálisan azonosított középpontok alapján meghatározott Voronoi-diagramok feldolgozását végeztük el. A vizsgálat során kifejlesztett automatizált eljárással meghatároztunk egy, az egyes cellákba írható legnagyobb körsugarat, és kiszűrtük a Delaunay-háromszögeléssel kapott élek közül azokat, melyekhez nem ténylegesen szomszédos csomópontok tartoznak. Ezzel kiszűrhetővé váltak a körelhelyezési problémákból ismert négyszögletes alakok. Az algoritmust ismert körelhelyezési, és buborékhab-elrendezési problémák megoldásainak fényképeire is alkalmaztuk. A kapott eredményeket összehasonlítva a tényleges mintázatok topológiája között a szabadon, illetve körben kialakuló buborékhaboknak és a körben történő körelrendezésnek megfelelő elrendezéseket találtunk. Ezért a receptákulumok mintázatának kialakulását leíró modellünket ezen feladatok mechanikai problémájának kombinációjaként kerestük. A részeredményről egy előadást tartottunk a XI. Magyar Mechanikai Konferencián [13].

Továbbfejlesztettük a kézi módszerrel előkészített receptákulum-fotókból a numerikus vizsgálathoz szükséges adatokat előállító algoritmust, így az már képes a buborékhabok vizsgálatára alkalmazott Surface Evolver program által értelmezhető bemenő adatsor előállítására. Az algoritmus és az általa kapott bemenő adatsor alkalmasnak tűnik az egyes élek, mint a maghelyek közötti falak merevségének változtatásával a külső és belső élek megkülönböztetésére (ezt sejtjük a körben elhelyezkedéshez hasonló konformációk egyik okának), valamint a rövidebb és hosszabb élek különböző merevségének kezelésére (ami az elhelyezési problémáknál tapasztalható négyszög-elrendezést eredményezi). A falmerevséget megadó függvény kézi változtatásával sikerült egy-egy mintából megfelelő alakot létrehozni.

Az eredményeket Edinburgh-ban, az „Isoperimetric problems, space-filling, and soap bubble geometry” workshopon ismertettük [18].

(2) Kötélhálók és rácsok

(2.1) *Kötélhálók.* A kötélhálók, a kábelkupolák és a tensegrity-szerkezetek mechanikai szempontból jellemzően olyan csuklós rúdszerkezetek, amelyek infinitezimális mechanizmusként működnek. A válasz az egyik legfontosabb kérdésre, hogy vajon egy sajátfeszültségi állapot elsőrendű merevséget biztosíthat-e egy ilyen szerkezetnek, attól függ, hogy elsőrendű vagy magasabb rendű mechanizmusról van szó. Az egyik rajzában Leonardo da Vinci egy ismétlődő kötélszerkezetet alkotott meg, amely a kötélerők exponenciális növekedését mutatja. Vizsgálatainkban ezt rúdszerkezetként modelleztük és nemcsak a (Leonardo rajzán szereplő) nyúlásmentes elemekből álló merev szerkezetet vizsgáltuk meg, hanem figyelembe vettük a rugalmas alakváltozásokat, és a hőmérsékleti változásokat is, melyek hatására a szerkezet infinitezimális mechanizmussá válik. Megállapítottuk, hogy az erőnövekedés üteme nagy mértékben függ a szerkezet rugalmasságától és hogy az elmozdulások a szerkezet mentén exponenciális csökkenést mutatnak, ellentétben az erők terjedésével. Az eredményeket Miskolcon, a XI. Magyar Mechanika Konferencián, és Shanghaiban, az IASS Szimpoziumon ismertettük, majd a továbfejlesztett eredményekről folyóiratcikket írtunk [14].

Tanulmányokat végeztünk három résztémában is: (i) hogyan kezelhető egy sajátfeszültség alatt álló trivalens háló tetszőleges síkra vett vetülete egy síklapokkal határolt poliéder élhálózata ugyanezen síkra vett vetületeként, (ii) egy vizsgálati módszer kialakítása, amellyel előállítható egy kiterjedt, szabályos hatszög-hálózatnak az a torzult alakja, amely egy (vagy több) szál elszakadása után újból megfeszíthetővé válik, (iii) egy szabályos háromszög-hálózatú síkrács szerelési sajátfeszültségeinek sztochasztikus jellemzése Fourier-integrál alakú ún. "forró rúd megoldás" segítségével. Tanulmányoztuk a sajátfeszültség alatti szabályos hatszöghálók szálátvágásból eredő szálerőit és elmozdulásait. Egyebek mellett megállapítottuk, hogy az átvágás utáni szálerőrendszer a háló méretének növelésekor az átvágás közelében egyre határozottabban tart valamilyen „standard szálerőarány-rendszerhez”. Sajnos e részfeladaton dolgozó Dr. Hegedűs István tartós betegsége miatt e téma kutatását nem tudtuk folytatni, és az elkezdett munka befejezetlen maradt. Helyette, a témához kapcsolódva, rúdszerkezetek merevségével foglalkoztunk. Az OTKA T046846 sz. kutatásban is vizsgált önduális csillagpoliéderekkel kapcsolatban kimutattuk, hogy a geometriai mátrix rangvizsgálatával megkapott sajátfeszültségi állapotok és infinitezimális mechanizmusok számára szimmetria-alapú számlálási módszerrel is jó előrejelzés adható. Ennek jelentősége, hogy az említett szerkezeti modell nem hagyományos rácsos tartó, hanem csúszkás kapcsolatokat is tartalmaz. Megállapításainkat az angliai Chicheley-ben megtartott „Rigidity of periodic and symmetric structures in nature and engineering” konferencián ismertettük. A témában korábban írt folyóiratcikkünk kéziratát átdolgoztuk, és az meg is jelent [19].

(2.2) *Általánosított rácsmodell.* A klasszikus rácsostartó-modell matematikai interpretációjaként előállítható egy feltételes szélsőérték-feladat, melynek célfüggvénye a szerkezet teljes potenciális energiája, mellékfeltételei pedig a kapcsolt csomópontok közötti távolságok és a köztük futó (rugalmas) rudak kompatibilitása. Ebben a megközelítésben a kényszerfeltétel egy hosszra, vagyis egydimenziós szimplexre vonatkozik, mely alapján adódik az elmélet magasabb dimenziójú szimplex-kényszerekre, praktikusan felületi és térfogati kényszerekre történő kiterjesztése. Az e tárgyban született folyóiratcikk [8] az elméleti alapok mellett rendszerezi a korábban már intuitív alapon használt eseti általánosításokat, kitér az elfajuló szimplexek esetére és elemzi a modell különböző szerkezetek vizsgálatára való alkalmasságát.

A rácsos tartók általánosításának egy másik módja, ha merev testeket csuklós rudakkal kapcsolunk össze. A szabályos síkbeli mozaikok sokszögeit merev testeknek tekintve, és ezeket azonos méretű csuklós rudakkal, azonos módon, egyszeres, ill. kétszeres kapcsolattal kapcsolva össze egy végtelen kiterjedésű, periodikus rácsot kapunk, amely equiauxetikus tulajdonsággal rendelkezik (a Poisson tényezőjének az értéke -1), azaz a rácsot bármely irányban megnyújtva az minden irányban ugyanolyan mértékben nyúlik meg. Szimmetria alapon azt vizsgáltuk, hogy hogyan alakul a rács statikai és kinematikai határozatlanságának a foka, ha a rács egységcellájának méretét változtatjuk. Az eredményekről a *Symmetry* folyóiratban számoltunk be [30].

(3) Műemléki poliéderek

(3.1) *Esztergályozott elefántcsont poliéderek.* A 16. század vége és a 18. század vége között készültek olyan többrétegű esztergályozott elefántcsont gömbök, amelyek egyszerre reprezentálnak poliédereket és gömbi körelhelyezéseket. Ezeknek a műtárgyaknak művészettörténeti feldolgozása már régen megtörtént, de e tárgyak geometriai tulajdonságainak a feltárása még nem. Ez utóbbi érdekében erőfeszítéseket tettünk a különböző gyűjteményekben fellelhető, a vizsgálat szempontjából érdekes műtárgyak felkutatására és geometriai azonosítására. Megállapítottuk, hogy az 5 szabályos test, továbbá az achimedesi testek közül 7 test, a Catalan-testek közül 2 test eredeti alakjában 2 pedig módosított formában előfordul az esztergályozott többrétegű gömbök között [3,4]. Megállapítottuk továbbá, hogy összefüggés áll fenn az esztergályozott poliéderek és a legritkább gömbi körfedés Voronoj-cellái által meghatározott poliéderek, valamint a leggömbölyűbb poliéderek között [24].

A koreai Gyeongju Nemzeti Múzeumában és a drezdai Grünes Gewölbe múzeumban tett látogatás alkalmával olyan muzeális (7-9. századból, ill. 17. századból származó) poliédereket fedeztünk fel, amelyek az (5) pontban tárgyalt poliéderekhez köthetők. Kimutattuk, hogy a talált 14, ill. 32 lapú poliéderek – oktaéderes, ill. ikozaéderes szimmetria feltétel mellett – megoldásai a leggömbölyűbb poliéder problémájának. Az eredményeket egy folyóiratcikkben tettük közzé [26].

(3.2) *Neolitikus faragott kőgolyók.* A Skóciában talált, több mint négyezer éves, egyedülálló neolitikus faragott kőgolyó-leleteket matematikusok eddig elsősorban abból a szempontból tanulmányozták, hogy előfordul-e közöttük mind az öt konvex szabályos test gömbi megjelenítése. Mi e kőgolyók morfológiáját vizsgáltuk, és ehhez erőfeszítéseket tettünk, hogy a mintegy 420 ismert és különböző nagy britanniai múzeumokban fellelhető kőgolyó fényképéhez hozzájussunk. 240-et sikerült is megszereznünk, és ezekből megállapítottuk a műtárgyak szimmetriáját, poliéder-reprezentációját, valamint az optimális gömbi körelhelyezésekkel, ill. fedésekkel való kapcsolatát. Felkutattunk számos kortárs geometrikus képzőművészeti alkotást, amelyben e leletek közvetlen hatása kimutatható [38].

(4) Poliéderen való fonás

(4.1) *Poliéderen való fonás.* A síkban a legegyszerűbb fonás a kétirányú kétszeres fonás. A fonás dupla vastagságú, és benne egymást merőlegesen keresztező szalagok futnak, a kereszteződéseknél felváltva felül és alul, és így egy sakktábla mintát képeznek. Ugyanilyen alapelvet lehet alkalmazni a kocka felületén egy zárt kosár fonásánál is. Most azonban a szalagok véges hosszúságúak, amelyek önmagukat is metszhetik, és a sakktábla mintázat szükségszerűen sérül a kocka csúcsainál. A T46846 sz. OTKA kutatásban a fonások geometriai tulajdonságait vizsgáltuk. Ebben a kutatásban pedig főleg a fonás kombinatorikus tulajdonságait vizsgáltuk. Az irodalom tanulmányozása révén észrevettük, hogy a kocka kétirányú kétszeres fonásában a zárt szalagok a háromszögekből és négyszögekből álló, („octahedrite”-nak nevezett) 4-szabályos poliédergráfok középköreinek felelnek meg. Ennek alapján kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést mutattunk ki az „octahedrite”-ok tulajdonságai és a poliéderek felületén létrehozott fonások tulajdonságai között [5].

Vizsgáltuk a kocka felületére illeszkedő, kétrétegű fonásminták előállításához szükséges zárt szalagok számát a b és c relatív prímek által meghatározott ferdeségű rács esetén. Csoportelméleti eszközök segítségével kimutattuk, hogy a kétrétegű fedéshez szükséges egybevágó szalagok száma csak 3, 4 és 6 lehet, szemben az O szimmetriacsoport rendje (24) alapján elméletileg adódó 12, 6, 4, 3, 2 és 1 értékekkel.
Kimutattuk, hogy a szalagszám akkor és csak akkor 4, ha b és c páratlanok, az ellenkező esetre pedig egyszerűsített eljárást adtunk a multiplicitás – 3 vagy 6 – kérdésének eldöntésére. Ez utóbbi lényege, hogy a 24 elemű O csoport műveletein végzett vizsgálatot a hatelemű C_{3v} csoport műveleteire vezeti vissza. A c szalagszámok $2kb$ (k pozitív egész, b itt rögzített) körüli szimmetrikus eloszlásából adódó periodicitására úgyszintén elméleti igazolást adtunk. Az eredményeket Miskolcon a XI. Magyar Mechanikai Konferencián [7] ismertettük.

A kocka felületén történő fonásra vonatkozó eredményeinket gráfelméleti megközelítésben kiterjesztettük az „octahedrite”-ok és „i-hedrite”-ok által generált poliéderekre. Megmutattuk, hogy léteznek kockától különböző poliéderek is, amelyeknek a felülete fonható. Itt adódtak olyan poliéderek is, amelyek felületét egyetlen zárt szalaggal való fonással elő lehetett állítani. Általános problémaként jelentkezett a gráfok poliéder reprezentációja, és fontos szerepet játszott Alekszandrov konvex poliéderekre vonatkozó unicitási tétele. Az eredményekről egy folyóiratcikkben számoltunk be [20].

Szabályos konvex poliédereken létrehozott két- és háromrétegű fonások b,c relatív prímekkel meghatározott ferdeségű családját vizsgáltuk. Kimutattuk, hogy a sajátfeszültségi állapotokat reprezentáló zárt szalagok szimmetria-orientált kvalitatív feszültségvizsgálata során a feszültségi állapotok – azaz szalagok – számának csupán alsó korlátját kapjuk. Rekurzív (skalár változójú) algoritmust adtunk a fonást alkotó zárt szalagok számának a b,c számpár függvényében történő meghatározására, valamint a kocka felületén létrehozott fonásokról bizonyítottuk, hogy az egyes szalagok saját középvonala körüli csavarodottsága az alternáló fonatban zérus, ha b,c közül pontosan az egyik páratlan, ellenkező esetben az adott szalag önmetszéseinek számával egyezik meg. Rekurzív algoritmust definiáltunk annak meghatározására, hogy adott b,c számpár esetében lehetséges-e a kocka felületén egy adott szalagnak olyan (az alternáló fonástól akár eltérő) elhelyezése, melyben a fentiek szerinti csavarodottság zérus. Eredményeinket a [34] folyóiratcikkben közöltük. Már a probléma kutatásának korábbi fázisában is az eredmények szemléltetésében fontos szerepet játszottak az ekvivalenciaosztályok és Alekszandrov unicitás tétele, ezért ezekkel behatóbban is foglalkoztunk.

A kétrétegű, egymást merőlegesen keresztező szalagokkal létrehozott fonásokat vizsgáltuk a kockáéval azonos topológiájú élhálózattal rendelkező, de általános geometriájú testeken. Állandó szalagszélesség mellett az ilyen testekre teljesülnie kell, hogy a síkba fejtett testháló minden sarokpontja racionális koordinátákkal rendelkezik. Megmutattuk, hogy az összes ilyen lehetséges poliéder származtatható egy alkalmasan választott (azaz fonható, de akár elfajuló geometriájú) tetraéder sorozatos csonkolásával. Az eredmények alapján folyóiratcikket írtunk: F. Kovács, Orthogonal weavings on general cuboids. A cikket publikálásra benyújtottuk.

(4.2) *Konvex poliéderek csomagolása*. A fonási problémához kapcsolódóan felmerülő kérdés, hogy zárt szalagok milyen rendszere rendelkezik egy konvex poliéderfelületen stabil sajátfeszültségi állapottal. A súrlódás, szalagszélesség és az esetleges csomózás hatásának elhanyagolásával végzett vizsgálat kimutatta, hogy az a, b, c élhosszal jellemzett téglatestek felületén a hagyományosnak tekinthető, élekkel párhuzamos szalagok esetében legalább négy hurok (és $4(a+b+c)$ összhossz) szükséges. Azt is megmutattuk, hogy ferde szalagok esetén már két, egy ponton egymásba hurkolt zárt szalag létrehozhat ilyen csomagolást, éspedig az iméntinél kisebb összhossz mellett. Eredményeinket konferenciacikkben [35] publikáltuk.

(5) Poliéderek térfogatának szélsőértékei, futball-labdák tervezése

(5.1) *Konvex poliéderek térfogatának infimuma*. Bebizonyítottuk a következőt. Legalább 3-dimenziós térben, ha tekintünk konvex poliédereket n lappal és adott lapterületekkel, akkor ezek térfogatai akármilyen kicsik lehetnek (a lapterületektől függetlenül). Ez egy korábbi tételünk analógja, ill. ellentettje. Ugyanis a síkbeli kérdésre, tehát adott oldalhosszakkal rendelkező konvex n-szögekre, a terület minimuma akkor éretik el, amikor az n-szög egy bizonyos, jól meghatározott háromszöggé fajul el. Ekkor ezen háromszög területe az oldalhosszaknak egy jól definiált függvénye. Az eredményeket folyóiratcikkben publikáltuk [28].

(5.2) *A leggömbölyűbb poliéderek*. Vizsgáltuk a poliéderekre vonatkozó izoperimetrikus problémát: Az egységgömb köré rajzolt n lapú poliéderek közül melyiknek a térfogata minimális? A leggömbölyűbb n lapú poliéder meghatározását egy helyettesítő mechanikai (statikai) modell egyensúlyi helyzetének meghatározására vezettük vissza. A statikai modellt a keresett poliéder duális poliéderéhez rendeljük. A duális poliéder háromszöglapjaihoz az oldalhosszak függvényében egy potenciált rendelünk, amelynek az oldalhosszak szerinti deriváltjai élerőket definiálnak. A duális poliédernek azt a helyzetét kell megkeresni, amelynél az élerők egyensúlyban vannak. Az egyensúlyt igazoló nemlineáris egyenletrendszert iterációval oldjuk meg. Ezzel a módszerrel lokálisan optimális megoldást adtunk n = 50 és 72 esetére. Az eredményekről cikket írtunk [25]. A módszert különböző szimmetriafeltételek mellett is alkalmaztuk különböző lapszámú poliéderekre (n = 38, 92, 122, 132), és adtunk sejtett optimális megoldásokat. Az eredményekről folyóiratcikket írtunk: Zs. Gáspár, A. Lengyel, T. Tarnai, The roundest polyhedra with symmetry constraint. A cikket publikálásra benyújtottuk. Egy előadásban megmutattuk, hogy milyen kapcsolat létezik az izoperimetrikus probléma és a legritkább gömbi körfedés problémája között [37].

(5.3) *Az Alekszandrov-tétel*. A tétel szerint, ha egy síkbeli poligon konvex poliéderré hajtogatható, akkor a kapott poliéder az egyedüli konvex poliéder. Ebből a konvex poliéderből izometrikus deformációval (hajtogatással) számos nemkonvex poliéder nyerhető. Ezek közül többnek a térfogata nagyobb a konvex poliéder térfogatánál. Kérdés: mekkora a nemkonvex poliéderek térfogatának maximuma? Kocka esetén minden, az irodalomban előforduló konkrét poliéder térfogatánál nagyobb térfogatú poliédereket konstruáltunk. Az eredményeket egy konferencia-kiadványban tettük közzé [27]. Megjegyezzük, hogy Buchin, Pak és Schulz szubmetrikus közelítésben az általunk meghatározottnál nagyobb térfogatértéket tett közzé, de poliéderük adatait nem közölték, ezért maga a konkrét poliéder fizikailag sem rekonstruálható.

(5.4) *Futball-labda tervezés*. Poliéderrel modellezett vékony membránhéjak alakváltozásait és feszültségeit vizsgáltuk a teherként működtetett belső nyomás hatására. Négy olyan ikozaéderes szimmetriájú, a leggömbölyűbbhöz közel álló poliéder alakváltozásainak numerikus szimulációit végeztük el, amelyek különböző kialakítású 32-paneles futball-labda geometriai és mechanikai modellezésére alkalmasak. Az egyes konfigurációk összehasonlíthatók a gömbölyűség és a kialakult feszültségállapot alapján. A számítások eredményeit egy konferenciacikkben ismertettük [23]. A részleteket is bemutató módon folyóiratcikket írtunk: A. Lengyel, K. Hincz, Statical analysis of inflated 32-panel soccer ball membrane models. A cikket publikálásra benyújtottuk.

A futball-labda tervezésnél használt mechanikai módszereket egy másik gyakorlati probléma vizsgálatánál is kipróbáltuk. Analitikus, numerikus és kísérleti eszközökkel vizsgáltuk egy PVC bevonatú, poliészterszálas ponyvából készült pneumatikus gerenda viselkedését négypontos hajlítás esetén. A numerikus számítás során ortotróp, síkbeli háromszögelemekkel közelítettük a membránt, a megtámasztásokat kontakt problémaként kezeltük. Különböző belső túlnyomás értékek mellett meghatároztuk a ráncosodást előidéző teher nagyságát, a teher-metszeterő, a teher-elmozdulás görbéket és a gerenda teherbírását. A kapott eredményeket egy konferenciacikkben foglaltuk össze [33].

(6) Matematikai alapok

(6.1) *Gömbkarakterizációk.* Tekintsünk egy állandó görbületű síkot, azaz a gömbfelületet, az euklideszi síkot, vagy a hiperbolikus síkot. Legyen ezek valamelyikében K és L zárt konvex halmaz, belső pontokkal, és mindkettő legyen különböző a teljes síktól. Tegyük fel, hogy K-nak és L-nek bármely K' es L' egybevágó példányára, azok metszete centrálisan szimmetrikus. Ekkor, bizonyos enyhe feltételek mellett, K és L két egybevágó gömb. Magasabb dimenziós szférikus, euklideszi, és hiperbolikus térre analóg tétel érvényes, de csak ha még plusz feltételezzük, hogy K és L felülete 2-szer folytonosan differenciálható, és a Gauss-görbület pozitív. Ha az eredeti kérdés egy variánsát vizsgáljuk, amikor is 2-dimenziós állandó görbületű terekben minden fenti metszet tengelyesen szimmetrikus, akkor sokkal több esetet kapunk. A gömbfelületen két, általában nemegybevágó kört kapunk. Az euklideszi síkon 5 különböző eset van, de K és L mindketteje csak kör, vagy párhuzamos sáv, vagy félsík lehet. A hiperbolikus síkon 9 különböző eset létezik, de mindezen esetekben mind K, mind L határának öszefüggő komponensei állandó görbületűek. Az eredményekről folyóiratcikket írtunk: Makai, E. Jr. & J. Jerónimo-Castro, Pairs of convex bodies in S^d, R^d, H^d with symmetric intersections of their congruent copies. A cikket publikálásra benyújtottuk.

(6.2) *Ekvivalenciaosztályok*. Általánosabb kontextusban a következőt vizsgáltuk. Egy gyűrű egy olyan struktúra, ahol a szokásos alapműveletek közül értelmezve van az összeadás, kivonás, szorzás, és ezek a szokásos azonosságokat teljesítik. Az egyszerűség kedvéért most még a szorzás kommutativitását is feltesszük. Erre példa pl. az n-szer n-es mátrixok halmaza, ami persze nem kommutatív. Egy kommutatív gyűrű radikáljának nevezzük mindazon gyűrűelemek halmazát, amelyeknek alkalmas magas hatványa 0 (a hatványkitevő különböző gyűrűelemekre különböző lehet). Az n-szer n-es mátrixok között ez azon mátrixokból áll, amelyeknek egyetlen sajátértéke van, mégpedig 0. Azaz a Jordan normálforma szerint lehetnek nem-0 Jordan blokkjai, de a hozzájuk tartozó sajátértékek mind 0-k. Egy kommutatív gyűrűt lefaktorizálhatunk a radikálja szerint, azaz két gyűrűelemet ekvivalensnek tekintünk, ha különbségük a gyűrű radikáljában van. Az egymással ekvivalens elemek egy ekvivalenciaosztályt képeznek. Ezen ekvivalenciaosztályok halmazán természetes módon értelmezett az összeadás, kivonás, és szorzás, azaz az ekvivalenciaosztályok is kommutatív gyűrűt képeznek. Egyszerűen belátható: ha van olyan x gyűrűelem, amelyre $x=x^2$, akkor az x

gyűrűelem ekvivalenciaosztályára, amit y-nal jelölünk, szintén fennáll $y=y^2$. Természetes módon adódik a kérdés, hogy itt van-e fordított irányú implikáció: azaz ha egy y ekvivalenciaosztályra teljesül $y=y^2$, akkor az y ekvivalenciaosztály tartalmaz-e egy olyan x gyűrűelemet, amelyre $x=x^2$? Ez a kérdés már régóta meg van válaszolva, mégpedig a pozitív irányban. Ennek az analógját mutattuk meg a komplex analitikus esetben: ha minden fent említett dolog egy z komplex változó analitikus függvénye, akkor is található a fenti tulajdonságú gyűrűelem, ami maga is a z komplex változó analitikus függvénye [29].

(6.3) *Szimmetria*. A szimmetria – szerves részét képezve a vizsgálatoknak – végigvonul a kutatáson. Itt az alábbiakat vizsgáltuk. D. Ryabogin és V. Yaskin bebizonyították a következő tételt. Legyen az egységgömbön adva egy folytonosan differenciálható f függvény. Legyen u egy egységvektor, és legyen $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$. Tekintsük azt az origócsúcsú kúpot, amelynek tengelye az u vektor irányába mutat, és amelynek félnyílásszöge $\pi/2 + \varphi$. Integráljuk az f függvényünket az egységgömbfelület és a kúpfelület metszetén, és legyen ez az integrál $I(u,\varphi)$. Ha az f függvényünk páros, akkor bármely u-ra az $I(u,\varphi)$ is páros függvénye φ-nek, amiből következik, hogy bármely u-ra, $\varphi = 0$ esetén, $\mathrm{d}(I(u,\varphi))/\mathrm{d}\varphi = 0$. Kérdés ennek megfordítása, azaz hogy igaz-e a fordított implikáció. Erre D. Ryabogin és V. Yaskin pozitív választ adtak, egy elég technikás bizonyítással. Mi a cikkünkben megmutattuk, hogy ezen kérdésre a pozitív válasz egy korábbi cikkünkben szereplő eredményünkből könnyen következik [36].

Bebizonyítottuk továbbá, hogy ha van a topologikus tereknek egy részosztálya, amelyből a topologikus terekre értelmezett bizonyos természetes műveletek nem vezetnek ki, akkor ez a részosztály csak két triviális részosztály egyike lehet. Erről folyóiratcikket írtunk: Makai, E. Jr., Epireflective subcategories of Top, T_2Unif, Unif, closed under epimorphic images, or being algebraic. A cikket publikálásra benyújtottuk.

Más OTKA pályázatokkal közösen a munkatervben nem szereplő témákat is vizsgáltunk.
(6.4) *A térfogatszorzat probléma.* A síkban két egymással poláris konvex lemez területeinek szorzatára adtunk a korábbiaknál jobb becsléseket [22]. Ugyanerről a problémáról egy kis survey cikket írtunk [12], és előadtuk Torontóban a Discrete and Computational Geometry konferencián.
(6.5) *Maximális kerületű metszetek.* Ha a gömbnek kis perturbációjára igaz, hogy a középponton átmenő síkokkal való metszetek kerületei maximálisak az összes párhuzamos síkmetszetek kerületei között, akkor a perturbáció elsőrendben centrálisan szimmetrikus [16].
(6.6) *A* [17] *cikk* kategóriaelméletről szól, és előadtuk Prágában a Topological Symposium-on.
(6.7) *Algebrákban komplex szám együtthatójú polinomok gyökei.* Nem-kommutatív algebrákban (mint pl. az n-szer n-es mátrixok) beláttuk, hogy a gyököknek mindig van egy, egy paramétertől folytonosan függő családja, és ezt előadtuk Szlovéniában a Linear Algebra and Functional Analysis konferencián.
(6.8) *Negyedrendű tenzorok reprezentációi.* Ez a részfeladat eredetileg nem szerepelt az elfogadott munkatervben. Vizsgálatára azért került sor, mert a negyedrendű tenzorok – a (6.7) ponthoz kapcsolódva – nem-kommutatív algebrát alkotnak, ugyanakkor rendkívül nagy jelentőségük van a mechanikában, továbbá a geometriai reprezentációjuk révén egyfajta kapcsolatot létesítenek a mechanika és a geometria között, mely tulajdonságuk fontossá teszi azokat a véges rendszerek szerkezeti topológiájában. Vizsgálataink a szimmetria szerepére irányultak. Megállapítottuk, hogy bizonyos szimmetria szint felett a tenzornak nem létezik inverze, így pl. a rugalmasságtan anyagi merevségi tenzora nem invertálható és nem lehet pozitív definit, továbbá a geometriai reprezentációja révén nem létesül kölcsönösen

egyértelmű kapcsolat a tenzor és a hozzá rendelt negyedrendű felület között. Az eredményekről előadást tartottunk Miskolcon a XI. Magyar Mechanikai Konferencián [9], Budapesten a 18th Inter-Institute Seminar és Londonban az IABSE-IASS Symposium [10] rendezvényeken. Egy négydimenziós kocka segítségével megmutattuk a negyedrendű tenzor különböző algebrai reprezentációs lehetőségeit. E tárgyban előadást tartottunk az EUROMECH konferencián Grazban [15].

A tervezettől való eltérések

(1) A kutatási terv a kötélhálók vizsgálata területén a sajátfeszültséggel megfeszített hálók alakjának és feszültségeinek analízisét, valamint a poliéderek topológiai tulajdonságaival meglevő analógia vizsgálatát irányozta elő. E munkát a tervek szerint Dr. Hegedűs István irányította és részben maga végezte volna. A kutatás első évét követően bekövetkezett tartós betegsége miatt azonban Dr. Hegedűs István sajnálatos módon a kutatómunka feladására kényszerült. Ezért ez az előirányzott részkutatás – ígéretes kezdet – után nem valósult meg. Helyette a szerkezeti topológia szempontjából ugyancsak fontos rácsok merevségének vizsgálatát, valamint a negyedrendű tenzorok reprezentációinak vizsgálatát végeztük el.

(2) A pályázati kutatási terv két brit kutatóval való együttműködést irányzott elő. A kutatás során azonban az egyes résztémákon kettőnél lényegesen több külföldi (nemcsak brit) és hazai kutatóval működtünk együtt. Az együttműködő kutatók költségei azonban nem terhelték a jelen K81146 OTKA ny. számú kutatás büdzséjét. A kutatók más forrásból fedezték költségeiket.

(3) A pályázatban a kutatást négy évre terveztük. Az ismert gazdasági nehézségek miatt a költségfelhasználásban aránytalanság állt elő, melynek feloldására kértük, és az OTKA engedélyét meg is kaptuk, hogy a kutatást egy évvel meghosszabbíthassuk. A változás a beszerzendő eszközökben is változást és költségátcsoportosítást is igényelt, amit az OTKA előzetes engedélyével hajtottunk végre.