

A DUNASZÉKESŐI PARTCSÚSZAMLÁS KINEMATIKAI ÉS DINAMIKAI MODELLJE GEODÉZIAI MEGFIGYELÉSEK ALAPJÁN

K 78332 OTKA pályázat részletes beszámolója

Készítette: Dr. Bányai László vezető kutató

Tartalomjegyzék

1. Előzmények	1
2. Monitoring hálózat és a vizsgálati módszerek	1
3. A geodéziai mérések feldolgozási módszerei	5
3.1 A geodéziai mérések 3D integrált kiegyenlítése	5
3.2 A koordináta idősorok kinematikai elemzése	15
3.3 A pontcsoportok együttes mozgásának vizsgálata	17
3.4 Idősorok korrelációs és regressziós vizsgálata	20
4. Az alkalmazott vizsgálati módszerekkel elért eredmények	20
4.1 Geodéziai mérések és koordináta idősorok feldolgozása	20
4.2 A fúróluk dőlésmérések és a vízszint adatok feldolgozása	29
4.3 A végelelem vizsgálatok eredményei	30
5. A partcsúszamlás általános modellje	30
6. Az új tudományos eredmények összefoglalása	32
 Az OTKA kutatásokhoz kapcsolódó publikációk	 33
Az OTKA kutatásokhoz kapcsolódó előadások	34
 Melléklet: A mozgásvizsgálati pontok koordinátaváltozásai	 35

1. Előzmények

2006-ban a dunaszekcsői magaspart Vár-hegy és Szent János hegy part menti szakaszán megjelent egy repedés, amit a földterület tulajdonosai jeleztek az önkormányzatnak. 2007 nyarán a repedés mentén már 20-30 cm süllyedés és nagyobb üregek (agyag kutak) is megjelentek. Ekkor már az önkormányzat és a megyei katasztrófavédelem is megtette a szükséges elővigyázatossági lépéseket, és a jelenség nagy médiai nyilvánosságot is kapott.

Intézetünket a pécsi Bányakapitányság kereste meg azzal a javaslattal, hogy most nyílik lehetőség arra, hogy egy aktív partsuszamlást geodéziai módszerekkel is végig követhessünk. Intézetünk korábban egy nemzetközi EU-s program (OASYS) keretein belül létesített egy mozgásvizsgálati teszt hálózatot Dunaföldvár területén, ahol három éven keresztül különböző geodéziai módszereket próbáltunk ki partsuszamlás megfigyelésre. A vizsgált időszakban azonban szignifikáns változásokat nem tapasztaltunk.

2007-ben intézetünk egy pályázatot nyert el az Akadémia Elnöki Keretéből kis elmozdulások nagy pontosságú megfigyelésére, amely részben kapcsolódott a partsuszamlások megfigyeléséhez is. Az önkormányzat anyagokkal és munkaerővel segítette a geodéziai hálózat gyors kiépítését, a Katasztrófavédelem kedvezményes szállással segítette szűkös anyagi lehetőségünket.

Az intenzív leszakadást során (2008. február 12.) a terület néhány óra alatt 8-9 m-t süllyedt, 2-3 m-t csúszott a Duna irányában és a barna fosszilis rétegek anyagából egy félsziget is megjelent a Duna medrében. A leszakadás utáni méréseket a megváltozott körülmények miatt már nem lehetett a korábbi módszerekkel megfelelő pontossággal végrehajtani és az anyagi kereteink is beszűkültek, pályázati forrásokat kellett keresnünk.

A 2008 évi OTKA pályázatunkat egy „szakértő” véleménye miatt (miszerint a kutatás nem modern, mivel nem PS-InSAR technológiával mérünk!) a bizottság nem támogatta, pedig a korábbi eredményekből SCI-s publikáció is készült. Csekély vigasz, hogy az MFGI egy EU-s pályázat keretében (DORIS), ellentétben a kulcsi területtel, Dunaszekcső mozgásos területén nem talált a PS-InSAR technológiának megfelelő szóró pontokat. A javasolt technológia egyrészt nagyon költséges, másrészt csak a műhold irányú változást lehet bizonyos feltételek mellett egyértelműen meghatározni, ami nem elegendő a pályázatunkban megfogalmazott célok eléréséhez.

Ez a beszámoló végül is a 2009-ben elnyert OTKA pályázat eredményeit foglalja össze.

2. Monitoring hálózat és a vizsgálati módszerek

A geodéziai monitoring hálózat vasbeton mérőpilléreinek elhelyezését az 1. ábrán mutatjuk be. A 100-400 pontokat 2007-ben az 500 pontot 2009-ben telepítettük. A földfelszín felett 1.20 m magas vasbeton mérőpillérek 3 m mély 20 cm átmérőjű fűrészlyukakban építettük ki. A pillérekben a földfelszínen a négy égtáj irányában szintezési gombokat is elhelyeztük, hogy azok lokális billenését szintezéssel tudjuk ellenőrizni. A pontot a pillér fejezetében kialakított Wild menetes csatlakozó jelöli ki. A pontjelölés közepén fűrt lyukba egy ismert magasságú rézkúp is behelyezhető, így a pillér magassága szintezéssel is meghatározható. A pilléreket olyan távolabbi (100-200 pont) és közelebbi (300-500 pont) helyeken építettük ki, amelyek GPS mérésre is alkalmasak és feltehetően a vizsgált mozgástól is mentesek.

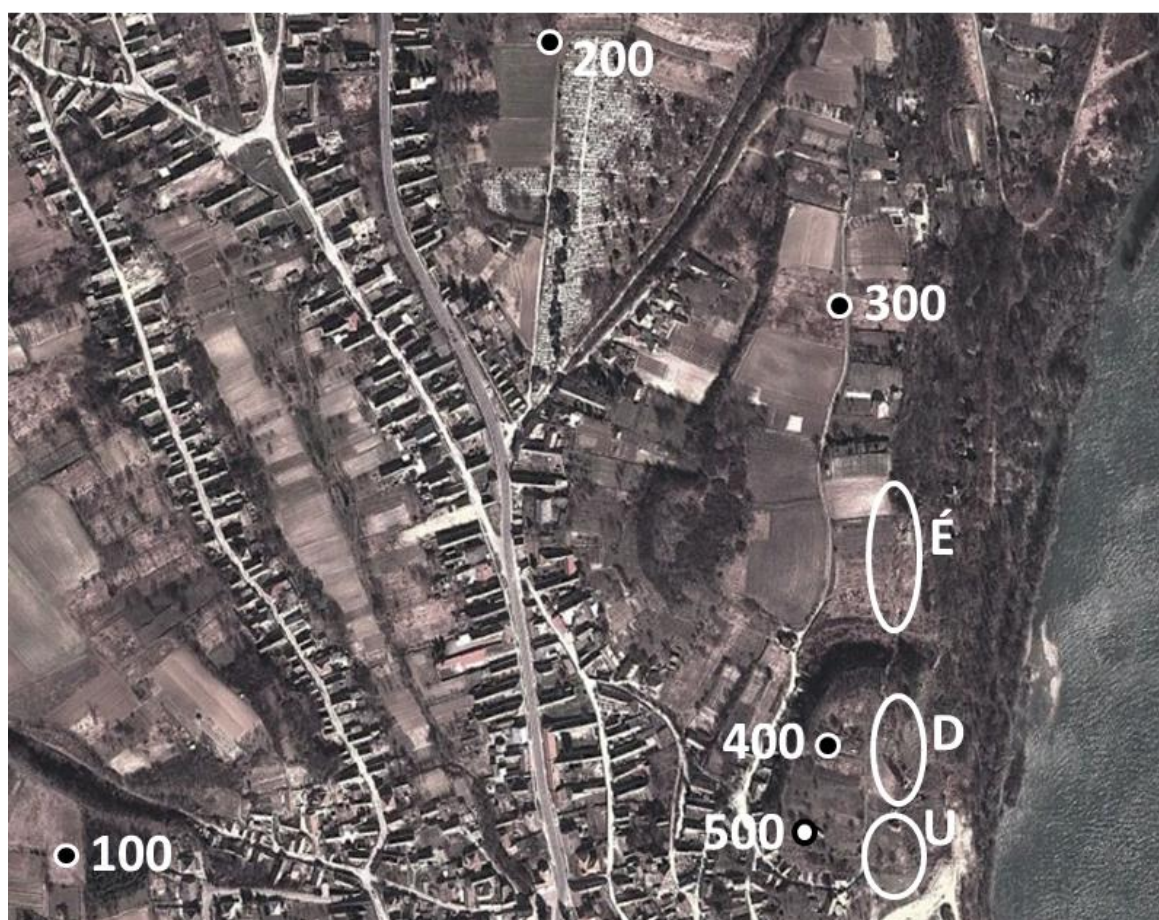
A tulajdonképpeni mozgásvizsgálati pontokat 60 cm mély 10 cm átmérőjű fűrt lyukak betonozásával készítettük el úgy, hogy a beton felszínen kiálló vasrúd vízszintes és szintezési mérésekre is alkalmas legyen. A geodéziai alappontok mellett két fűrészlyuk dőlésmérőt is telepítettünk.

A mozgásvizsgálati pontokat tartalmazó É, D és U hálózati részeket és a dőlésmérők helyét a 2. ábrán részletesen is bemutatjuk.

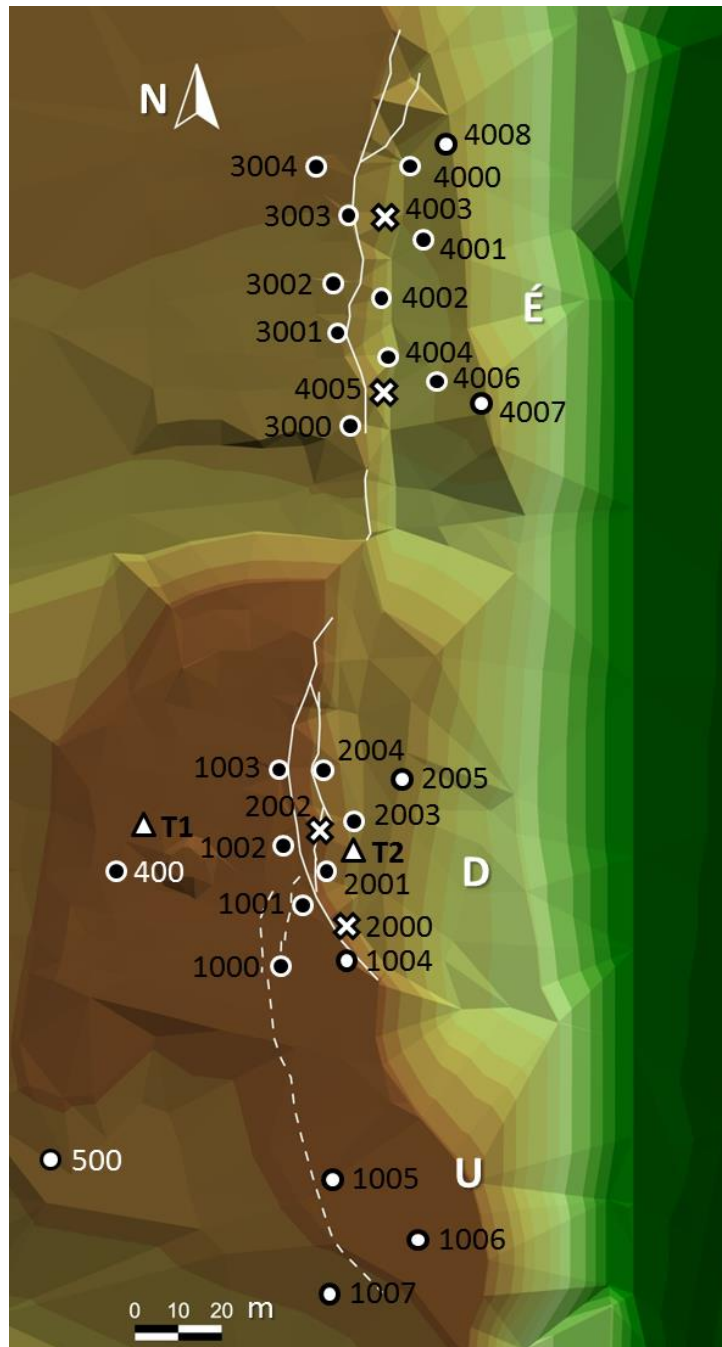
Az intenzív leszakadást követően (2008. február 12.) a töréshez közeli pontokon 5 m-es rúddal sem lehetett megfelelő GPS méréseket végrehajtani, és a mozgásvizsgálati pontokat sem lehetett szintezéssel közvetlenül összekapcsolni. Ezért a mérőprogram 2009 évi újra indításakor új pontokat kellett telepíteni, figyelembe véve a mozgások feltételezett déli irányú továbbterjedését is. Ezt a feltételezést a méréseink már a másodlagos repedés láthatóvá válása előtt is jelezték. A leszakadt részek pontjainak meghatározásához ezért a korábbi GPS és szintezési mérések mellett szabatos mérőállomást is alkalmaznunk kellett.

Mivel a pontok között mért GPS vektorok a globális WGS84 koordináta rendszerre vonatkoznak, olyan új kiegyenlítési eljárás dolgoztunk ki, amely a GPS vektorok, szintezett magasságkülönbségek és a mérőállomással mért mennyiségek együttes szabatos 3D kiegyenlítését teszi lehetővé a WGS84 rendszerben. Ahhoz, hogy a mérőállomás méréseit is integrálni tudjuk olyan magasságmérő adattér készítettünk, amellyel a műszer és prizma magasságát is 1 mm-en belül meg tudjuk mérni.

A geodéziai mérési stratégia a rendelkezésünkre álló GPS műszerek számának megfelelően változott. Az utolsó években a mérések első fázisában (első nap délután) az öt pilléren egyidejű méréseket hajtottunk végre. Ez idő alatt ellenőriztük a mozgásvizsgálati pontokat és előkészítettük a szintezési vonalakat is.



1 ábra. A geodéziai hálózat vasbeton mérőpillérei (100-500), az ellipszisek az északi (É), a déli (D) és az új (U) hálózatrészeket jelöli



2 ábra. A geodéziai hálózat mozgásvizsgálati pontjai, É az északi, D a déli és U az új hálózati részekben. A fehér keretes pontokat 2007-ben, a fekete keretes pontok 2009-ben telepítettük. A háromszögek a T1 és T2 dőlésmérők helyét jelölik. A keresztel jelölt pontok az intenzív leszakadás során elpusztultak. A folytonos vonal a 2007 évi törésvonalat, a szaggatott vonal a 2010 évi új repedéseket jelöli. A háttér a leszakadás utáni terepmodellt mutatja.

A második fázisban (második nap) a hálózati részekhez közeli két pilléren és három mozgásvizsgálati ponton egyidejű GPS méréseket hajtottunk végre, majd a három pont közül a „hátsó előre fuss” elvnek megfelelően végig haladtunk az összes ponton. Ez lényegében egy háromszög láncolatot képez, ami két pillérhez pontonként is kapcsolódik. Ezzel a módszerrel nagyszámú fölös GPS vektor határozható meg. A GPS mérésekkel egy időben a 300-500 pilléreket és a mozgásvizsgálati pontokat (ahol lehet) szabatos szintezéssel is összekapcsoltuk.

A harmadik fázisban (harmadik nap) az É és D területeken azokat a pontokat, amelyek GPS technikával nem mérhetők, a GPS pontokhoz viszonyítva mérőállomással határoztuk meg. Ez a módszer a leszakadt részek pontjait magasságilag is összekapcsolja a peremen lévő pontokkal.

A három fázis méréseit az előzetes hibaszűrés után egy lépésben egyenlítjük ki úgy, hogy a pillérek első időponthoz viszonyított koordináta változásai négyzetösszegét minimalizáljuk (általánosított szabad hálózat). Az első mérési időpontban a 300 pont WGS84 koordinátáit a permanens GNSS hálózat segítségével határoztuk meg.

A mozgásvizsgálati pontok idősorainak elemzésére kinematikus modellt és Kálmán-szűrést is alkalmaztunk. Az összetartozó pontcsoportok együttes mozgását hét paraméteres hasonlósági transzformációval vizsgáltuk, és levezettük a pontcsoportok dőlési paramétereit, melyeket a fúróluk dőlésmérők eredményeivel is összehasonlítottuk.

A 2. ábrán jelzett helyeken 2 darab (T1 és T2) fúróluk dőlésmérőt (Model 722A, Applied Geomechanics Inc, USA) telepítettünk megközelítőleg 3 m mélységben. A dőlésmérők pozitív tengelyeit északi és keleti irányba tájoltuk. A T2 dőlésmérőt az intenzív leszakadás után 2010-ben újra kellett telepíteni. A Vár-hegy mögötti úton két már használaton kívüli kútban vízszint regisztráló berendezéseket is elhelyeztünk. A dölések és a talajvíz regisztrációja mellett a Duna vízállási adatait a www.vizugy.hu honlapról töltöttük le. A dőlés és kút adatokat óránként regisztráltuk. Az idősorokból képzett napi átlagokat használtuk fel a dölések, a kutak és a Duna vízszint közötti Pearson korrelációs és többváltozós lineáris regressziós analízis (Multiple Variable Regression – MVR) végrehajtásához.

A mérőpillérek, mozgásvizsgálati pontokat és a dőlésmérők kiépítését a 3. ábrán mutatjuk be.

A mérések kezdetekor és az intenzív leszakadás után mért terepmodell felhasználásával készített keresztmetszetben 2D végeelem modellezést is végrehajtottunk a partmozgások fizikai és talajmechanikai hátterének jobb megértéséhez. A vizsgálatokat a BME Geotechnika tanszéke végezte a Plaxis 2D programcsomaggal, amely a Mohr-Coulomb anyagmodellt és különböző anyagtulajdonságok figyelembe vételét teszi lehetővé. A részletes vizsgálatokat nagy terjedelmük miatt nem mellékeljük).



3 ábra. A mérőpillérek (balra), mozgásvizsgálati pontok (középen) és fúróluk dőlésmérő (jobbra) kiépítése.

3. A geodéziai mérések feldolgozási módszerei

3.1 A geodéziai mérések 3D integrált kiegyenlítése

A megfigyelési egyenletek felírása.

A GPS mérések közvetlenül a WGS84 geocentrikus rendszerben értelmezhetők, amely gyakorlatilag azonos az EU-ban és Magyarországon is használt ETRS80 rendszerrel.

Az ellipszoidi és a hozzá kapcsolódó topocentrikus koordinátarendszert a 4. ábrán mutatjuk be, ahol X , Y és Z a geocentrikus derékszögű koordinátákat, φ , λ és h az ellipszoidi szélesség, hosszúság és magasság értékeket, X^e , Y^e és Z^e a P ponthoz tartozó derékszögű topocentrikus koordináta rendszert jelöli. Z^e az ellipszoidra merőleges zenit irányt, X^e a meridián síkban az északi és Y^e a keleti irányt jelöli. Ebben a rendszerben értelmezhető a PQ irány α ellipszoidi azimutja, ζ zenit szöge és a két pont s távolsága.

A geodéziai mérőállomással mért mennyiségek közvetlenül a csillagászati (szintfelületi) koordináta rendszerre vonatkoznak, amit az 5. ábrán mutatunk be. A geocentrikus koordináták azonosak az előző rendszerrel, de a P ponthoz kapcsolódó topocentrikus koordináta rendszert most a nehézségi gyorsulás g_P iránya jelöli ki. Z^* a w_P szintfelületre merőleges zenit irány, X^* az északi irány a csillagászati meridián síkban és Y^* a keleti irány. A geodéziai méréseket az önkényesen definiált geoid w_0 szintfelületére kell redukálni. A két szintfelület közötti távolság a függővonal mentén mérve a H geoid (vagy tengerszint) feletti magasság, φ^* és λ^* a földrajzi (vagy csillagászati) szélesség és hosszúság. A P pont szintfelületre és a geoidra vonatkozó gyorsulás vektorai közötti irány eltérések általában elhanyagolhatók, vagy modellszámítással határozhatók meg. A topocentrikus rendszerben értelmezhetők a α^* és ζ^* csillagászati azimut és zenit irány.

A két rendszer közötti kapcsolat a

$$\begin{aligned}\zeta &= (\varphi^* - \varphi) \\ \eta &= (\lambda^* - \lambda) \cos \varphi \\ N &= h - H\end{aligned}, \quad (1)$$

$$\eta \tan \varphi = (\alpha^* - \alpha)$$

összefüggésekkel adható meg, ahol N a geoid unduláció, ξ és η a függővonal elhajlás két komponense a meridián és első vertikális síkban. Az összefüggések utolsó sora az azimutok konstans Laplace korrekcióját adja meg. A konstans Laplace korrekció alkalmazása mellett az azimutok és zenitszögek irányfüggősége (amely jóval kisebb a konstans korrekciónál) az

$$\begin{aligned}\alpha &= \alpha^* - (\zeta \sin \alpha - \eta \cos \alpha) \cot \zeta \\ \zeta &= \zeta^* + (\zeta \sin \alpha + \eta \cos \alpha)\end{aligned}, \quad (2)$$

összefüggésekkel vehető figyelembe. A topocentrikus koordináta rendszerek között tehát a

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \zeta \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\sin \alpha \cot \zeta & \cos \alpha \cot \zeta \\ 0 & 1 & 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha^* \\ \zeta^* \\ s \\ \xi \\ \eta \end{bmatrix} \quad (3)$$

általános összefüggés írható fel.

A mérőállomásokkal azonban a P álláspontról az azimutok helyett közvetlenül csak irányértékek (d_{PQ}^*) mérhetők, amelyek egy konstans tájékozási ismeretlennel (ω_p^*) térnek el egy mástól

$$\begin{aligned} d_{PQ}^* &= \alpha_{PQ}^* - \omega_p^* \\ d_{PQ} &= \alpha_{PQ} - \omega_p \end{aligned} \quad (4)$$

A mérőállomással mért értékek alapegyenlete tehát a

$$\begin{bmatrix} d_{PQ} \\ \varsigma_{PQ} \\ s_{PQ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\sin \alpha_{PQ} \cot \varsigma_{PQ} & \cos \alpha_{PQ} \cot \varsigma_{PQ} \\ 0 & 1 & 0 & \sin \alpha_{PQ} & \cos \alpha_{PQ} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d_{PQ}^* \\ \varsigma_{PQ}^* \\ s_{PQ} \\ \xi_p \\ \eta_p \end{bmatrix} \quad (5)$$

lineáris összefüggéssel írható le, ahol az egyenlet baloldala a topocentrikus ellipszoidi paramétereket tartalmazza, és a közvetlen mérések mellett a függővonal elhajlások is figyelembe vehetők.

Ezek a mérések azonban nem közvetlenül a geodéziai alappontokra, hanem a műszer és prizma referencia pontjaira vonatkoznak

$$\begin{aligned} X' &= X + h' \cos \varphi \cos \lambda \\ Y' &= Y + h' \cos \varphi \sin \lambda, \\ Z' &= Z + h' \sin \varphi \end{aligned} \quad (6)$$

ahol értelemszerűen h' a műszer, vagy a prizma mért magassága. Az ellipszoidi topocentrikus paraméterek és a globális koordináták között az

$$\alpha_{PQ} = \arctan \frac{-(X'_p - X'_Q) \cdot \sin \lambda_p + (Y'_p - Y'_Q) \cdot \cos \lambda_p}{-(X'_p - X'_Q) \cdot \sin \varphi_p \cdot \cos \lambda_p - (Y'_p - Y'_Q) \cdot \sin \varphi_p \cdot \sin \lambda_p + (Z'_p - Z'_Q) \cdot \cos \varphi_p}, \quad (7)$$

$$\varsigma_{PQ} = \arccos \frac{(X'_p - X'_Q) \cdot \cos \varphi_p \cdot \cos \lambda_p + (Y'_p - Y'_Q) \cdot \cos \varphi_p \cdot \sin \lambda_p + (Z'_p - Z'_Q) \cdot \sin \varphi_p}{\sqrt{(X'_p - X'_Q)^2 + (Y'_p - Y'_Q)^2 + (Z'_p - Z'_Q)^2}}, \quad (8)$$

$$s_{PQ} = \sqrt{(X'_p - X'_Q)^2 + (Y'_p - Y'_Q)^2 + (Z'_p - Z'_Q)^2} \quad (9)$$

összefüggések írhatók fel. A paraméterek koordináták szerinti deriváltjai a szakirodalom alapján

$$\begin{aligned} \partial \alpha_{PQ} / \partial X'_p &= -\partial \alpha_{PQ} / \partial X'_Q = \frac{\sin \lambda_p \cdot \cos \alpha_{PQ} - \sin \varphi_p \cdot \cos \lambda_p \cdot \sin \alpha_{PQ}}{s_{PQ} \cdot \sin \varsigma_{PQ}} \\ \partial \alpha_{PQ} / \partial Y'_p &= -\partial \alpha_{PQ} / \partial Y'_Q = \frac{-\cos \lambda_p \cdot \cos \alpha_{PQ} - \sin \varphi_p \cdot \sin \lambda_p \cdot \sin \alpha_{PQ}}{s_{PQ} \cdot \sin \varsigma_{PQ}}, \\ \partial \alpha_{PQ} / \partial Z'_p &= -\partial \alpha_{PQ} / \partial Z'_Q = \frac{\cos \varphi_p \cdot \sin \alpha_{PQ}}{s_{PQ} \cdot \sin \varsigma_{PQ}} \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned}\partial \varsigma_{PQ} / \partial X'_P &= -\partial \varsigma_{PQ} / \partial X'_Q = \frac{(X'_Q - X'_P) \cos \varsigma_{PQ} - s_{PQ} \cdot \cos \varphi_P \cdot \cos \lambda_P}{s_{PQ}^2 \cdot \sin \varsigma_{PQ}} \\ \partial \varsigma_{PQ} / \partial Y'_P &= -\partial \varsigma_{PQ} / \partial Y'_Q = \frac{(Y'_Q - Y'_P) \cos \varsigma_{PQ} - s_{PQ} \cdot \cos \varphi_P \cdot \sin \lambda_P}{s_{PQ}^2 \cdot \sin \varsigma_{PQ}},\end{aligned}\quad (11)$$

$$\begin{aligned}\partial \varsigma_{PQ} / \partial Z'_P &= -\partial \varsigma_{PQ} / \partial Z'_Q = \frac{(Z'_Q - Z'_P) \cos \varsigma_{PQ} - s_{PQ} \cdot \sin \varphi_P}{s_{PQ}^2 \cdot \sin \varsigma_{PQ}} \\ \partial s_{PQ} / \partial X'_P &= -\partial s_{PQ} / \partial X'_Q = (X'_P - X'_Q) / s_{PQ} \\ \partial s_{PQ} / \partial Y'_P &= -\partial s_{PQ} / \partial Y'_Q = (Y'_P - Y'_Q) / s_{PQ} \cdot \\ \partial s_{PQ} / \partial Z'_P &= -\partial s_{PQ} / \partial Z'_Q = (Z'_P - Z'_Q) / s_{PQ}\end{aligned}\quad (12)$$

A (4) összefüggésnek megfelelően az irányértékek deriváltjai azonosak az azimut deriváltjával, továbbá $\partial d_{PQ} / \partial \omega_P = -1$. A (6) összefüggésnek megfelelően a X' , Y' és Z' szerinti deriváltak azonosnak tekinthetők az X , Y és Z szerinti deriváltakkal.

Mivel a (10) és (11) csak közelítő összefüggések, és a kiegyenlítés során a kiszámításukhoz jó kezdő koordinátákra van szükség, ezért egy új módszert vezettünk be.

A paramétereket első lépésben topocentrikus koordináta különbségekké

$$\begin{aligned}\Delta X_{PQ}^e &= s_{PQ} \cdot \sin \varsigma_{PQ} \cdot \cos(\omega_P + d_{PQ}) \\ \Delta Y_{PQ}^e &= s_{PQ} \cdot \sin \varsigma_{PQ} \cdot \sin(\omega_P + d_{PQ}) \cdot, \\ \Delta Z_{PQ}^e &= s_{PQ} \cdot \cos \varsigma_{PQ}\end{aligned}\quad (13)$$

majd geocentrikus koordináta különbségekké számítjuk át:

$$\begin{aligned}\Delta X'_{PQ} &= -\Delta X_{PQ}^e \cdot \sin \varphi_P \cdot \cos \lambda_P - \Delta Y_{PQ}^e \cdot \sin \lambda_P + \Delta Z_{PQ}^e \cdot \cos \varphi_P \cdot \cos \lambda_P \\ \Delta Y'_{PQ} &= -\Delta X_{PQ}^e \cdot \sin \varphi_P \cdot \sin \lambda_P + \Delta Y_{PQ}^e \cdot \cos \lambda_P + \Delta Z_{PQ}^e \cdot \cos \varphi_P \cdot \sin \lambda_P \cdot \\ \Delta Z'_{PQ} &= \Delta X_{PQ}^e \cdot \cos \varphi_P + \Delta Z_{PQ}^e \cdot \sin \varphi_P\end{aligned}\quad (14)$$

A geocentrikus koordináta különbségek paraméterek szerinti deriváltjai (13) és (14) alapján könnyen levezethetők

$$\begin{aligned}\partial \Delta X'_{PQ} / \partial \alpha_{PQ} &= s_{PQ} (\sin \varphi_P \cdot \cos \lambda_P \cdot \sin \varsigma_{PQ} \cdot \sin \alpha_{PQ} - \sin \lambda_P \cdot \sin \varsigma_{PQ} \cdot \cos \alpha_{PQ}) \\ \partial \Delta Y'_{PQ} / \partial \alpha_{PQ} &= s_{PQ} (\sin \varphi_P \cdot \sin \lambda_P \cdot \sin \varsigma_{PQ} \cdot \sin \alpha_{PQ} + \cos \lambda_P \cdot \sin \varsigma_{PQ} \cdot \cos \alpha_{PQ}) \\ \partial \Delta Z'_{PQ} / \partial \alpha_{PQ} &= s_{PQ} (-\cos \varphi_P \cdot \sin \varsigma_{PQ} \cdot \sin \alpha_{PQ}) \\ \partial \Delta X'_{PQ} / \partial \varsigma_{PQ} &= s_{PQ} (-\sin \varphi_P \cdot \cos \lambda_P \cdot \cos \varsigma_{PQ} \cdot \cos \alpha_{PQ} - \sin \lambda_P \cdot \cos \varsigma_{PQ} \cdot \sin \alpha_{PQ} \\ &\quad - \cos \varphi_P \cdot \cos \lambda_P \cdot \sin \varsigma_{PQ}) \\ \partial \Delta Y'_{PQ} / \partial \varsigma_{PQ} &= s_{PQ} (-\sin \varphi_P \cdot \sin \lambda_P \cdot \cos \varsigma_{PQ} \cdot \cos \alpha_{PQ} + \cos \lambda_P \cdot \cos \varsigma_{PQ} \cdot \sin \alpha_{PQ} \\ &\quad - \cos \varphi_P \cdot \sin \lambda_P \cdot \sin \varsigma_{PQ}) \cdot \\ \partial \Delta Z'_{PQ} / \partial \varsigma_{PQ} &= s_{PQ} (\cos \varphi_P \cdot \cos \varsigma_{PQ} \cdot \cos \alpha_{PQ} \\ &\quad - \cos \varphi_P \cdot \sin \varsigma_{PQ}) \\ \partial \Delta X'_{PQ} / \partial s_{PQ} &= \Delta X'_{PQ} / s_{PQ} \\ \partial \Delta Y'_{PQ} / \partial s_{PQ} &= \Delta Y'_{PQ} / s_{PQ} \\ \partial \Delta Z'_{PQ} / \partial s_{PQ} &= \Delta Z'_{PQ} / s_{PQ}\end{aligned}\quad (15)$$

Az tájékozási ismeretlen szerinti deriváltak

$$\begin{aligned}\partial \Delta X'_{PQ} / \partial \omega_P &= \partial \Delta X'_{PQ} / \partial \alpha_{PQ} \\ \partial \Delta Y'_{PQ} / \partial \omega_P &= \partial \Delta Y'_{PQ} / \partial \alpha_{PQ} \quad . \\ \partial \Delta Z'_{PQ} / \partial \omega_P &= \partial \Delta Z'_{PQ} / \partial \alpha_{PQ}\end{aligned}\tag{16}$$

A geocentrikus koordinátakülönbségek ugyan a koordináták lineáris összefüggéseinek adódnak, de ezek csak kvázi lineárisnak tekinthetők, mivel az (5) és (13-15) összefüggések kiszámításához előzetes koordinátákra és tájékozási ismeretlenekre van szükség.

A GPS mérések előzetes feldolgozása során közvetlenül geocentrikus koordináta különbségek határozhatók meg

$$\begin{aligned}\Delta X_{PQ} &= X_Q - X_P \\ \Delta Y_{PQ} &= Y_Q - Y_P \quad , \\ \Delta Z_{PQ} &= Z_Q - Z_P\end{aligned}\tag{17}$$

ahol már az antenna magasságokat is figyelembe vesszük.

Ha feltételezzük, hogy a GPS koordinátakülönbségek differenciálisan kis mértékben elfordulhattak az előzetes feldolgozás bázis állomása körül, az elfordulások a

$$\begin{bmatrix} \Delta X_{PQ} \\ \Delta Y_{PQ} \\ \Delta Z_{PQ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\Delta Z_{PQ}^0 / \rho & \Delta Y_{PQ}^0 / \rho \\ 0 & 1 & 0 & \Delta Z_{PQ}^0 / \rho & 0 & -\Delta X_{PQ}^0 / \rho \\ 0 & 0 & 1 & -\Delta Y_{PQ}^0 / \rho & \Delta X_{PQ}^0 / \rho & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta X'_{PQ} \\ \Delta Y'_{PQ} \\ \Delta Z'_{PQ} \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}\tag{18}$$

összefüggéssel vehetők figyelembe, ahol $\Delta X'_{PQ}$, $\Delta Y'_{PQ}$ és $\Delta Z'_{PQ}$ most a differenciálisan elfordult koordináta különbségeket, ΔX_{PQ}^0 , ΔY_{PQ}^0 és ΔZ_{PQ}^0 az előzetes koordinátákból számolt koordináta különbségeket, α , β és γ az X, Y és Z tengelyek körüli elfordulásokat jelölik. A konstans $\rho = 206264.8$ ívmásodperc bevezetésével az elfordulások is ívmásodpercben értendők.

Ha feltételezzük, hogy az egyes koordináta különbségek méretarány hibával terheltek, a (17) egyenletek egy újabb ismeretlennel bővíthetők

$$\begin{aligned}\Delta X_{PQ} &= X_Q - X_P + 10^{-6} \Delta X_{PQ}^0 \cdot \Delta sc \\ \Delta Y_{PQ} &= Y_Q - Y_P + 10^{-6} \Delta Y_{PQ}^0 \cdot \Delta sc \quad , \\ \Delta Z_{PQ} &= Z_Q - Z_P + 10^{-6} \Delta Z_{PQ}^0 \cdot \Delta sc\end{aligned}\tag{19}$$

ahol a Δsc méretarány korrekció ppm (mm/km) mértékben adódik.

Ha feltételezzük, hogy az egyes koordináta különbségek a bázisponton vagy a végponton fáziscentrum külpontossági hibával terheltek, a (17) egyenletek újabb ismeretlenekkel bővíthetők

$$\begin{aligned}
\Delta X_{PQ} &= X_Q - X_P - \sin \varphi_Q^0 \cos \lambda_Q^0 \cdot \Delta n_Q - \sin \lambda_Q^0 \cdot \Delta e_Q + \cos \varphi_Q^0 \cos \lambda_Q^0 \cdot \Delta u_Q \\
\Delta Y_{PQ} &= Y_Q - Y_P - \sin \varphi_Q^0 \sin \lambda_Q^0 \cdot \Delta n_Q + \cos \lambda_Q^0 \cdot \Delta e_Q + \cos \varphi_Q^0 \sin \lambda_Q^0 \cdot \Delta u_Q \\
\Delta Z_{PQ} &= Z_Q - Z_P + \cos \varphi_Q^0 \cdot \Delta n_Q - \sin \varphi_Q^0 \cdot \Delta u_Q
\end{aligned} \tag{20}$$

vagy

$$\begin{aligned}
\Delta X_{PQ} &= X_Q - X_P + \sin \varphi_P^0 \cos \lambda_P^0 \cdot \Delta n_P + \sin \lambda_P^0 \cdot \Delta e_P - \cos \varphi_P^0 \cos \lambda_P^0 \cdot \Delta u_P \\
\Delta Y_{PQ} &= Y_Q - Y_P + \sin \varphi_P^0 \sin \lambda_P^0 \cdot \Delta n_P - \cos \lambda_P^0 \cdot \Delta e_P - \cos \varphi_P^0 \sin \lambda_P^0 \cdot \Delta u_P, \\
\Delta Z_{PQ} &= Z_Q - Z_P - \cos \varphi_P^0 \cdot \Delta n_P + \sin \varphi_P^0 \cdot \Delta u_P
\end{aligned} \tag{21}$$

ahol Δn , Δe és Δu a fáziscentrum északi, keleti és magassági külpontosságai az ellipszoidi topocentrikus koordináta rendszerben.

Két pont között szintezéssel meghatározott és az ellipszoidra vonatkozó magasság különbségek között a

$$\begin{aligned}
(h_P - h_Q) &= (H_P - H_Q) + (N_P - N_Q) \\
\Delta h_{PQ} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta H_{PQ} \\ \Delta N_{PQ} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{22}$$

összefüggések írhatók fel, ahol ΔH_{PQ} a szintezéssel meghatározott ortométeres (vagy normál) magasság különbség. A két pont közötti geoid unduláció különbséget azonban nem lehet mindig elhanyagolni. Az ellipszoid feletti magasságkülönbségek geocentrikus koordináták szerinti deriváltjai a szakirodalom alapján gömbi közelítéssel írhatók fel

$$\begin{aligned}
\partial \Delta h_{PQ} / \partial X_Q &= \cos \varphi_Q \cdot \cos \lambda_Q \\
\partial \Delta h_{PQ} / \partial Y_Q &= \cos \varphi_Q \cdot \sin \lambda_Q \\
\partial \Delta h_{PQ} / \partial Z_Q &= \sin \varphi_Q \\
\partial \Delta h_{PQ} / \partial X_P &= -\cos \varphi_P \cdot \cos \lambda_P \\
\partial \Delta h_{PQ} / \partial Y_P &= -\cos \varphi_P \cdot \sin \lambda_P \\
\partial \Delta h_{PQ} / \partial Z_P &= -\sin \varphi_P
\end{aligned} \tag{23}$$

A szintezett magasságkülönbségek közvetlenül az alappontokra vonatkoznak. Mivel ezek a mérések csak magassági irányú információkat hordoznak, a kiegyenlítésnél csak kiegészítő mérésekként alkalmazhatók.

A mérések kiegyenlítési és sztochasztikus modelljei.

A geodézia mérőállomással mért értékek (5), a GPS mérések (18) és a szintezett magasságkülönbségek (22) alapegyenletei általánosan az

$$l_c = B \cdot l \tag{24}$$

egyenlettel írhatók fel, ahol a baloldalon az ellipszoidi rendszerre átszámolt (korrigált), a jobb oldalon a közvetlenül meghatározott és a korrekciós mennyiségek (ζ , η , ΔN , α , β , γ) találhatók. Ha a közvetlenül meghatározott és a korrekciós mennyiségeket egyaránt valódi

mérésekként kezeljük, a legkisebb négyzetes kiegyenlítés a Gauss-Helmert modellel végezhető el. A kiegyenlítés alapvető ismeretlenjei a pontok geocentrikus koordinátái. Azonban a mérőállomásnál álláspontonként egy tájékozási ismeretlent is be kell vezetni, míg a GPS méréseknél a méretarány korrekciók és a fáziscentrum külpontosságok megfelelő számú fölös mérés esetén szintén ismeretlenként kezelhetők.

A Gauss-Helmert modell alapegyenletei

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B}\mathbf{v} &= \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b} \\
 \mathbf{P} &= \mathbf{Q}^{-1} \\
 \mathbf{Q}_c &= \mathbf{B}\mathbf{Q}\mathbf{B}^t \\
 \mathbf{P}_c &= (\mathbf{B}\mathbf{Q}\mathbf{B}^t)^{-1} \\
 \hat{\mathbf{x}} &= (\mathbf{A}^t\mathbf{P}_c\mathbf{A})^{-1}(\mathbf{A}^t\mathbf{P}_c\mathbf{b}) \\
 \hat{\mathbf{v}} &= \mathbf{Q}\mathbf{B}^t\mathbf{P}_c(\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b}) \\
 \hat{\mathbf{I}} &= \mathbf{I} + \hat{\mathbf{v}} \\
 \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}} &= (\mathbf{A}^t\mathbf{P}_c\mathbf{A})^{-1} = \mathbf{N}^{-1} \\
 \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{v}}\hat{\mathbf{v}}} &= \mathbf{Q}\mathbf{B}^t(\mathbf{P}_c - \mathbf{P}_c\mathbf{A}\mathbf{N}^{-1}\mathbf{A}^t\mathbf{P}_c)\mathbf{B}\mathbf{Q} \\
 \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{I}}\hat{\mathbf{I}}} &= \mathbf{Q} - \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{v}}\hat{\mathbf{v}}} \\
 \hat{\sigma}_0^2 &= \frac{\hat{\mathbf{v}}^t\mathbf{P}\hat{\mathbf{v}}}{m - n}
 \end{aligned} \tag{25}$$

ahol $\mathbf{B}$ a mérések együttható mátrixa, $\mathbf{A}$ az ismeretlenek lineáris, vagy lineárizált együttható mátrixa, $\mathbf{b}$ az ellipszoidi rendszerre átszámított és az előzetes ismeretlenek alapján számított értékek különbsége (tisztag vektor), $\mathbf{v}$ a mért értékek ismeretlen mérési javításainak a vektora, $\mathbf{x}$ a keresett paraméterek előzetes értékeinek ismeretlen változás vektora, $\mathbf{P}$ és $\mathbf{Q}$ a mérések, $\mathbf{P}_c$ és $\mathbf{Q}_c$ a korrigált mérések súly és súlykoefficiens mátrixa, $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{v}}$ és $\hat{\mathbf{I}}$ a kiegyenlítés során becsült értékek, $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}}$, $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{v}}\hat{\mathbf{v}}}$ és $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{I}}\hat{\mathbf{I}}}$ a becsült értékek súlykoefficiens mátrixa, továbbá $\hat{\sigma}_0$ a súlyegység becsült a posteriori középhibája, m a mérések és n a becsült paraméterek száma.

A (25) egyenletrendszer megoldásához szükséges számú pont koordinátáit is rögzíteni kell (ismert pontként kell kezelni). Az ismeretlenek rögzítése mellett olyan kényszerfeltételi egyenletek is figyelembe vehetők, ahol az általánosított szabad hálózat elvének megfelelően valamely pontcsoport előzetes koordinátáihoz viszonyított változások négyzetösszegét minimalizáljuk. Mivel az eljárás lineárizált összefüggéseket is alkalmaz, a megfelelő megoldás csak iterációval érhető el. Az egyes iterációs lépések során az ismeretleneket folyamatosan korrigáljuk és az $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ mátrixokat is újra számítjuk, amíg a $\hat{\sigma}_0$ mennyiség változása már elhanyagolhatónak tekinthető.

Ha az adatfeldolgozásnál nem vesszük figyelembe a korrekciós tagokat $\mathbf{B}$ egység mátrixszá fajul és az összefüggések a klasszikus koordináta kiegyenlítés összefüggéseire redukálódnak.

A mérőállomás mérési egyenleteinek felírásakor két változat közül választhatunk. A hagyományos megközelítésnél (egy irányérték esetében)

$$A = \begin{bmatrix} \partial\alpha_{PQ}/\partial X'_P & \partial\alpha_{PQ}/\partial Y'_P & \partial\alpha_{PQ}/\partial Z'_P & \partial\alpha_{PQ}/\partial X'_Q & \partial\alpha_{PQ}/\partial Y'_Q & \partial\alpha_{PQ}/\partial Z'_Q & -1 \\ \partial\varsigma_{PQ}/\partial X'_P & \partial\varsigma_{PQ}/\partial Y'_P & \partial\varsigma_{PQ}/\partial Z'_P & \partial\varsigma_{PQ}/\partial X'_Q & \partial\varsigma_{PQ}/\partial Y'_Q & \partial\varsigma_{PQ}/\partial Z'_Q & 0 \\ \partial s_{PQ}/\partial X'_P & \partial s_{PQ}/\partial Y'_P & \partial s_{PQ}/\partial Z'_P & \partial s_{PQ}/\partial X'_Q & \partial s_{PQ}/\partial Y'_Q & \partial s_{PQ}/\partial Z'_Q & 0 \end{bmatrix}, \quad (26)$$

ahol a deriváltakat (10-12) alapján kell az előzetes koordináták alapján kiszámítani. Ebben az esetben az ismeretlenek a P és Q pontok koordinátáinak változásai és a P pontra vonatkozó tájékozási ismeretlen. A mérések súlykoefficiens mátrixa diagonális

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{\sigma_0^2} \begin{pmatrix} \sigma_d^2 & \sigma_\varsigma^2 & \sigma_s^2 & \sigma_\xi^2 & \sigma_\eta^2 \end{pmatrix}, \quad (27)$$

ahol σ_0 a súlyegység a priori középphibája és a σ mennyiségek a mérések előzetesen becsült középphibái.

Az új megközelítésnél a méréseket (13) és (14) alkalmazásával geocentrikus koordináta különbségekké számítjuk át, ekkor

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & \partial\Delta X'_{PQ} / \partial\omega_P \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & \partial\Delta Y'_{PQ} / \partial\omega_P \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & \partial\Delta Z'_{PQ} / \partial\omega_P \end{bmatrix}, \quad (28)$$

ahol a tájékozási ismeretlen együtthatói a (15) és (16) szerint számíthatók.

A geocentrikus koordináta különbségekké átszámított mérések súlykoefficiens mátrixa a hibaterjedés törvényének megfelelően a

$$\mathbf{Q}_c = \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{Q} \mathbf{B}^T \mathbf{D}^T \quad (29)$$

összefüggéssel számítható, ahol a $\mathbf{D}$ mátrix elemei (15) deriváltakból számíthatók.

A tájékozási ismeretlenek jelenléte miatt minden egyes állásponton legalább két irányra kell mérést végezni.

A kiegyenlítés során kis méretű hálózatok esetében a ξ és η mennyiségek gyakorlatilag elhanyagolhatók, ekkor $\mathbf{B}$ egység mátrixszá fajul. Ha a hálózat területén ismertek ezek az értékek, és a megbízhatóságuk is hasonló a mért mennyiségek megbízhatóságához, korrekcióként vehetők figyelembe, amelyek a kiegyenlítés során javításokat kapnak. A harmadik lehetőség, hogy ezeket a paramétereket nulla várható (előzetes) értékű, de ismert szórású mennyiségként kezeljük.

A GPS méréseknél a koordináták mellett különböző járulékos ismeretleneket vezethetünk be. A P és Q pontok közötti vektornál a (19) összefüggésnek megfelelően

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 10^{-6} \Delta X_{PQ}^0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 10^{-6} \Delta Y_{PQ}^0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 10^{-6} \Delta Z_{PQ}^0 \end{bmatrix}, \quad (30)$$

ahol a járulékos ismeretlen a méretarány korrekció. A fáziscentrum külpontosság esetében

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & \partial X/\partial n & \partial X/\partial e & \partial X/\partial u \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & \partial Y/\partial n & \partial Y/\partial e & \partial Y/\partial u \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & \partial Z/\partial n & \partial Z/\partial e & \partial Z/\partial u \end{bmatrix}, \quad (31)$$

ahol az n , e és u mennyiségek a járulékos ismeretlenek. A (31) deriváltjait annak megfelelően, hogy a külpontosságok a P vagy Q pontra vonatkoznak a (20) vagy (21) képletek alapján lehet meghatározni. Az adatfeldolgozás során mind a három, csak a horizontális, vagy csak a magassági külpontosságok a becsülhető mennyiségek.

Ha feltételezzük, hogy a GPS koordináta különbségek az (18) összefüggésnek megfelelően differenciálisan kis elfordulási hibákat is tartalmaznak, a következő mátrixok írhatók fel

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{\sigma_0^2} \begin{bmatrix} c^2 \mathbf{M} & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_r \end{bmatrix}, \quad (32)$$

$$\mathbf{M}_r = \langle \sigma_\alpha^2 \quad \sigma_\beta^2 \quad \sigma_\gamma^2 \rangle$$

ahol $\mathbf{M}$ a GPS mérések előzetes feldolgozásából származó variancia-kovariancia mátrix, az $\mathbf{M}_r$ diagonális mátrix a tengelyek körüli nulla várható értékű elfordulások becsült szórásait tartalmazza, továbbá c egy önkényesen megválasztható hangoló konstans (lásd később).

A P és Q pont között színtezéssel meghatározott magasságkülönbségnél

$$A = \left[\partial \Delta h_{PQ} / \partial X_P \quad \partial \Delta h_{PQ} / \partial Y_P \quad \partial \Delta h_{PQ} / \partial Z_P \quad \partial \Delta h_{PQ} / \partial X_Q \quad \Delta h_{PQ} / \partial Y_Q \quad \partial \Delta h_{PQ} / \partial Z_Q \right], \quad (33)$$

ahol csak a pontok koordinátái az ismeretlen paraméterek és a differenciálokat a (23) összefüggés tartalmazza.

A mért magasságkülönbségek együttható és a súlykoefficiens mátrixa a következőképpen írható fel

$$\mathbf{B} = [1 \quad 1]$$

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{\sigma_0^2} \langle \sigma_{\Delta H}^2 \quad \sigma_{\Delta N}^2 \rangle, \quad (34)$$

$$\mathbf{Q}_c = \frac{\sigma_{\Delta H}^2 + \sigma_{\Delta N}^2}{\sigma_0^2} = \mathbf{P}_c^{-1}$$

ahol $\sigma_{\Delta H}$ a színtezett magasságkülönbség és $\sigma_{\Delta N}$ a geoid unduláció különbségek becsült szórása. Ha a (34) összefüggéseket behelyettesítjük a (25) megoldásba a

$$\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{Q} \mathbf{B}^t \mathbf{P}_c \hat{\mathbf{b}}$$

$$\hat{v}_{\Delta H} = \frac{\sigma_{\Delta H}^2}{\sigma_{\Delta H}^2 + \sigma_{\Delta N}^2} \hat{b} \quad (35)$$

$$\hat{v}_{\Delta u} = \frac{\sigma_{\Delta N}^2}{\sigma_{\Delta H}^2 + \sigma_{\Delta N}^2} \hat{b}$$

eredményt kapjuk, ami azt mutatja, hogy a maradék ellentmondásokat csak a szórások arányában osztja szét a két komponens között.

Közeleli pontok esetén, ahol a geoid unduláció különbségek a színtezések megbízhatóságánál is lényegesen kisebbek értékek gyakorlatilag elhanyagolhatók. Ha nagyobb területeken a geoid

unduláció változékonysága hasonló a GPS mérések magassági komponenségének középhibájához az együttes alkalmazás javíthatja az eredményeket.

A kiegyenlítés eredményeinek statisztikai vizsgálata.

Ha a geodéziában szokásos módon feltételezzük, hogy a mérési javítások normális eloszlást követnek, akkor a kiegyenlítés globális vizsgálatánál a

$$\frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} (m - n) = \frac{\hat{\mathbf{v}}^t \mathbf{P} \hat{\mathbf{v}}}{\sigma_0^2} = \chi^2 \quad (36)$$

statisztika khi-négyzet eloszlást követ. Ha a tesztérték kielégíti az egyoldali

$$\chi^2 < \chi_{m-n, 1-\alpha}^2, \quad (37)$$

vagy a kétoldali

$$\chi_{m-n, \alpha/2}^2 < \chi^2 < \chi_{m-n, 1-\alpha/2}^2 \quad (38)$$

feltételt, ahol az elméleti értékek az α szignifikancia szintre vonatkoznak, feltételezhetjük, hogy a mérési javítások összhangban vannak az előzetes középhibákkal. Az egyoldali feltétel nagyon kis javításokat is megenged, amíg a kétoldali tesztnél azok csak bizonyos határon belül mozoghatnak.

Az egyes mérési javítások esetében a

$$\frac{|\hat{v}_i|}{\hat{\sigma}_0 \sqrt{q_i}} = \tau_i \quad (39)$$

statisztika tau eloszlást követ, ahol q_i a $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{v}}}$ súlykoefficiens mátrix i -edik főátló eleme. Ha

$$\tau_i \geq \tau_{m-n, \alpha/2}, \quad (40)$$

akkor a mérés kiugró (hibás) értéknek tekinthető. A tau elméleti értéke a

$$\tau_{m-n} = \frac{t_{m-n-1} \sqrt{m-n}}{\sqrt{m-n-1 + t_{m-n-1}^2}} \quad (41)$$

összefüggéssel a t student eloszlásból számítható.

A statisztikai vizsgálatokat az $\alpha = 0.05$ szinten hajtjuk végre. A hibás méréseket járulékos paraméterek felvételével, vagy azok törlésével próbáljuk kiszűrni, úgy hogy a (38) feltétel is teljesüljön.

Gyakran előfordul, hogy kiugró értékeket ugyan nem találunk, de a (38) feltétel mégsem teljesül. Ez azt jelenti, hogy a kiegyenlítés ugyan nem rossz, de a javítások jóval nagyobbak (ritkább esetben kisebbek), mint ami az előzetes középhibák alapján elvárható lenne. Ez különösen a GPS méréseknél igaz, ahol a nagyon nagyszámú fölös mérések miatt a becsült középhibák gyakran nagyon kis értéknek adódnak. Ezt a (39) összefüggésnél bevezetett hangoló konstans segítségével vehetjük figyelembe, amit első lépésben csak a GPS koordináta különbségek kiegyenlítéséből a

$$c \approx \frac{\hat{\sigma}_0}{\sigma_0} \quad (42)$$

hányadossal közelíthetünk.

3.2 A koordináta idősorok kinematikai elemzése

A mozgásvizsgálati pontok koordináta idősarai lehetővé teszik az egyedi pontmozgások kinematikai jellemzőinek meghatározását is. A vizsgálatokhoz az egyes pontok geocentrikus koordinátáit (X,Y,Z) a kezdőidőpontra vonatkozó topocentrikus koordináta rendszer vízszintes (N - északi és E - keleti) és magassági (U) komponenseire célszerű átszámítani. (A 4. ábrán az N, E és U jelölések helyett az X^e , Y^e és Z^e jelöléseket használtuk. A hálózat kiegyenlítő programja a koordinátaváltozások N, E és U komponenseit is kiszámítja.)

A kinematikában a mozgási folyamatok időbeli leírására másodfokú polinomokat alkalmaznak, ahol az út idő szerinti első deriváltja a sebesség, a második a gyorsulás és a harmadik az út kezdő értéke. A polinom három függvény összegéből írható fel

$$\begin{aligned} s_1 &= s \\ s_2 &= v t \\ s_3 &= \frac{1}{2} a t^2 \\ s_k &= s + v t + \frac{1}{2} a t^2 \\ \dot{s}_k &= v + a t \end{aligned} \quad , \quad (43)$$

ahol s a konstans kezdőérték, v a konstans sebesség, a a konstans gyorsulás, s_k a kinematikus polinom, $\dot{s}_k$ a pillanatnyi sebesség egyenese (a polinom első deriváltja) és t az idő. Az egyes paraméterek és az idő között nagyon szoros az összefüggés. A $t = 0$ időpontban $s_k = s$, $\dot{s}_k = v$ és az s_3 függvény itt veszi fel a szélsőértékét. Az a előjelétől függetlenül az s_k és s_3 függvénynek is van csökkenő és növekvő szakasza. Pozitív a esetében a függvény felülről homorú (konvex) és a pillanatnyi sebesség egyenese emelkedő, negatív a esetében a függvény domború (konkáv) és a pillanatnyi sebesség egyenese csökkenő. A függvények legérdekesebb tulajdonsága azonban az, hogy az s_3 és s_k függvények lefutása teljesen azonos, de az s_k parabola szélsőértéke a többi ponttal együtt $[-v/a ; s - v^2/2a]$ vektorral eltoltt helyzetbe kerül az s_3 függvényhez viszonyítva. Ennek a gyakorlati alkalmazás során nagyon fontos következményei vannak.

Valamely mérésből (vagy meghatározásból) származó mennyiségekhez azonban csak önkényesen megválasztott időpontokat tudunk hozzárendelni (nem ismerjük azt a t_k időpontot, amihez az s és v konstansok tartoznak), ezért az adatsorhoz csak az

$$s_k = s_0 + v_0 \Delta t + \frac{1}{2} a \Delta t^2 \quad (44)$$

függvényt tudjuk illeszteni, ahol $\Delta t = t - t_0$, t_0 a kezdő időpont, s_0 a pillanatnyi függvény érték és v_0 a pillanatnyi sebesség a t_0 időpontban. A becült értékek

$$\begin{aligned} s_0 &= s + v (t - t_k) + \frac{1}{2} a (t - t_k)^2 \\ v_0 &= v + a (t - t_k) \end{aligned} \quad , \quad (45)$$

tartalmazzák az s és v konstans értékeket is, de t_k ismeretének hiányában ezek nem becsülhetők. A pillanatnyi értékek azonban akkor is léteznek, ha s és v értékek is nullák. Ha $a = 0$, vagyis a függvény egyenessé fajul, akkor (45) alapján s és v is meghatározható (egyenest vonalú egyenes mozgás).

Hagyományos függvényillesztés.

A mozgási folyamat becsülhető paramétereit a vizsgált intervallumokban a hagyományos legkisebb négyzetes kiegyenlítéssel tudjuk meghatározni. Most a (44) összefüggést kezelhetjük megfigyelési egyenletként, amely az ismeretlenekre vonatkozóan lineáris, és az s_k mennyiségekhez rendelünk mérési javításokat. Egyetlen vizsgált érték esetén a

$$[v_{s_k}] = [1 \quad \Delta t \quad 0.5 \Delta t^2] \begin{bmatrix} s_0 \\ v_0 \\ a \end{bmatrix} - [s_k] \quad (46)$$

megfigyelési egyenlet írható fel, amely több érték esetében a

$$\mathbf{v} = \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{b} \quad (47)$$

mátrixos alakban általánosítható. A megoldás a (25) egyenletekből is levezethető, amennyiben a $\mathbf{B}$ mátrixot egységmátrixnak tekintjük

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{A} \mathbf{x} - \mathbf{b} \\ \mathbf{P} &= \mathbf{Q}^{-1} \\ \hat{\mathbf{x}} &= (\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} (\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{b}) \\ \hat{\mathbf{v}} &= \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{b} \\ \hat{\mathbf{I}} &= \mathbf{I} + \hat{\mathbf{v}} \\ \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}} &= (\mathbf{A}^t \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} = \mathbf{N}^{-1} \\ \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{v}}\hat{\mathbf{v}}} &= \mathbf{Q} - \mathbf{A} \mathbf{N}^{-1} \mathbf{A}^t \\ \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{I}}\hat{\mathbf{I}}} &= \mathbf{Q} - \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{v}}\hat{\mathbf{v}}} \\ \hat{\sigma}_0^2 &= \frac{\hat{\mathbf{v}}^t \mathbf{P} \hat{\mathbf{v}}}{m - n} \end{aligned} \quad (48)$$

A jelölések definícióját már a korábbi fejezetben megadtuk. Mivel az alapegyenlet lineáris, előzetes kezdő értékeket sem kell felvenni és iterációra sincs szükség. Az egyenletrendszer megoldásához legalább három időpontra van szükség.

A kidolgozott eljárásnál az intervallumok kezdőpontjában keressük az s_0 , v_0 és a értékeket. Az együttes kiegyenlítésben előírhatjuk, hogy valamely időintervallum utolsó és a következő intervallum kezdőpontjának felezőjében

- a függvény értékek azonosak legyenek (metsződés),
- a függvény értékek és az első deriváltak (a pillanatnyi sebességek) is azonosak legyenek (simuló átmenet), vagy
- a két intervallum között ne legyen kényszerkapcsolat (rámpa, szakadás).

A mozgási folyamatok elemzésénél a becsült sebességek és gyorsulások dominanciáját is célszerű megvizsgálni. Amennyiben feltételezzük, hogy méréseinket normális eloszlású hibák terhelik, a

$$\frac{|x_i|}{\hat{\sigma}_0 \sqrt{q_i}} = \frac{|x_i|}{\hat{\sigma}_{x_i}} = t_i \quad (49)$$

statisztika student eloszlást követ, ahol x_i a becsült mennyiség, q_i a $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}}$ súlykoefficiens mátrix i -edik főátló eleme és $\hat{\sigma}_{x_i}$ a mennyiség középhibája. Ha a statisztika nagyobb egy küszöbértéknél, akkor a mennyiség szignifikánsan eltér a nulla értéktől. Ha a gyorsulások és sebességek közel azonos szignifikanciával jelentkeznek, kinematikai szempontból az a domináns, amely egységnyi idő alatt nagyobb változást eredményez.

Kálmán-szűrés

Alternatívaként megvizsgáltuk a kinematikus mozgásegyenlet paramétereinek dinamikus Kálmán-szűréssel történő meghatározását is, ahol mérési időpontonként új s , v , és a pillanatnyi értékeket becsülhetünk.

A Kálmán-szűrés átviteli függvényét a (44) összefüggés figyelembe vételével az

$$\mathbf{x}'_i = \begin{bmatrix} s_i \\ v_i \\ a_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t & 0.5 \Delta t^2 \\ 0 & 1 & \Delta t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{s}_{i-1} \\ \hat{v}_{i-1} \\ \hat{a}_{i-1} \end{bmatrix} = \mathbf{T} \hat{\mathbf{x}}_{i-1} \quad (50)$$

összefüggéssel írhatjuk le, ahol $\mathbf{T}$ az átviteli mátrix, $\hat{\mathbf{x}}_{i-1}$ az előző időpontban becsült állapotvektor, $\Delta t = t_i - t_{i-1}$ az időintervallum és $\mathbf{x}'_i$ az átvitelből számított érték. A variancia-kovariancia mátrix

$$\mathbf{Q}_{\mathbf{x}'_i} = \mathbf{T} \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}_{i-1}} \mathbf{T}^t + \mathbf{Q}_m \quad (51)$$

ahol $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}_{i-1}}$ az előző időpontban becsült variancia kovariancia mátrix, t a transzponált mátrixot jelöli, és a $\mathbf{Q}_m$ mátrixszal a másodfokú modell bizonytalanságát lehet figyelembe venni. A közvetlen méréseket és azok pontosságát a

$$\mathbf{b}_i = \mathbf{A} \mathbf{x}'_i \quad \text{és} \quad \mathbf{Q}_{b_i} \quad (52)$$

lineáris egyenlettel és a $\mathbf{Q}_{b_i}$ variancia-kovariancia mátrixszal lehet figyelembe venni, ahol $\mathbf{b}_i$ az ismeretlenekhez kapcsolódó méréseket és $\mathbf{A}$ az együttható mátrixot jelöli. Az állapot vektor a következő összefüggésekkel frissíthető

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_i &= \mathbf{x}'_i + \mathbf{K}(\mathbf{b}_i - \mathbf{A} \mathbf{x}'_i) \\ \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}_i} &= (\mathbf{I} - \mathbf{K} \mathbf{A}) \mathbf{Q}_{\mathbf{x}'_i} \\ \mathbf{K} &= \mathbf{Q}_{\mathbf{x}'_i} \mathbf{A}^t (\mathbf{Q}_{b_i} + \mathbf{A} \mathbf{Q}_{\mathbf{x}'_i} \mathbf{A}^t)^{-1} \end{aligned} \quad (53)$$

ahol $\mathbf{K}$ a Kálmán vagy nyereségmátrix és $\mathbf{I}$ az egységmátrix.

A gyakorlati vizsgálatok során mindig csak a következő időponttal frissítjük a becslést, ezért $\mathbf{b}_i$ csak egy mennyiséget tartalmaz és $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, ami lényegesen megkönnyíti az (53) összefüggések kiszámítását. A modell alkalmazhatósága többek között az $\hat{\mathbf{x}}_0$ kezdőértékek, a $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}_0}$, $\mathbf{Q}_m$ és a $\mathbf{Q}_{b_i}$ mennyiségek megfelelő kiválasztásától, a „hangolástól” is jelentősen függ. Esetünkben a kezdőparamétereket a hagyományos kiegyenlítés első intervallumának becsült értékei alapján is figyelembe vehetjük. Az egyik legfontosabb tényező a $\mathbf{Q}_m$ és $\mathbf{Q}_{b_i}$ mennyiségek felvétele. Ha a $\mathbf{Q}_m$ értékeit nullának választanánk, a mérésenkénti összegződés során a $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}_i}$ mátrixban a középhibák egyre kisebbek lennének és a $\mathbf{x}'_i$ értékek egyre kisebb korrekciókat kapnának. Az időpontonként alkalmazott $\mathbf{Q}_m$ mátrixszal ez a hatás csökkenthető.

3.3 A pontcsoportok együttes mozgásának vizsgálata

A mozgásvizsgálati pontok koordináta idősarai lehetővé teszik az egyes összetartozó pontok együttes mozgásának vizsgálatát is. Ha feltételezzük, hogy a pontcsoportok egy szilárd blokk felületén helyezkednek el, a pontok mozgását a hét paraméteres hasonlósági transzformáció súlyponti rendszerre vonatkozó szabatos alkalmazásával is megvizsgálhatjuk.

Első lépésben meghatározzuk a kiválasztott pontcsoport referenciái időpontra vonatkozó súlypontját

$$\begin{aligned} X_0 &= (\sum X_i^0)/n \\ Y_0 &= (\sum Y_i^0)/n, \\ Z_0 &= (\sum Z_i^0)/n \end{aligned} \quad (54)$$

ahol n pontok száma. A pontcsoport referencia és vizsgált időpontra vonatkozó koordinátáit a súlypontra vonatkozó topocentrikus (horizontális és magassági) koordináta rendszerbe a

$$\begin{bmatrix} N_i \\ E_i \\ U_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \varphi_0 \cos \lambda_0 & -\sin \varphi_0 \sin \lambda_0 & \cos \varphi_0 \\ -\sin \lambda_0 & \cos \lambda_0 & 0 \\ \cos \varphi_0 \cos \lambda_0 & \cos \varphi_0 \sin \lambda_0 & \sin \varphi_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_i - X_0 \\ Y_i - Y_0 \\ Z_i - Z_0 \end{bmatrix} \quad (55)$$

összefüggéssel lehet átszámítani, ahol φ_0 és λ_0 a súlypont ellipszoidi szélessége és hosszúsága. A referencia időpontban a topocentrikus koordináták átlag értékei értelem szerűen nullák, de a vizsgált időpont átlagértékei

$$\begin{aligned} t_N &= (\sum N_i)/n \\ t_E &= (\sum E_i)/n \\ t_U &= (\sum U_i)/n \end{aligned} \quad (56)$$

megadják a pontcsoport referencia időponthoz viszonyított átlagos eltolódásait. Ha az átlagértékeket levonjuk a vizsgált időpont koordinátáiból a pontcsoport két időpontbeli súlypontjai azonosak lesznek.

Második lépésben meghatározzuk a két időpont közötti átlagos méretarány eltérést

$$\lambda = \sum D_i^0 / \sum D_i, \quad (57)$$

ahol D_i^0 és D_i a pontok referencia és vizsgált időpontra vonatkozó súlyponti távolságai.

A vizsgált időszak topocentrikus koordinátáit a λ méretarányal végigszorozva a két időpont között a súlypontok mellett az átlagos méretarányok is azonosak lesznek. Ekkor a koordináták eltéréseit már csak a pontcsoport elfordulásai és a mérési hibák jelenthetik.

A harmadik lépésben a két rendszer közötti elfordulások a

$$\begin{bmatrix} N_i \\ E_i \\ U_i \end{bmatrix} = \mathbf{R}(\alpha, \beta, \gamma) \begin{bmatrix} N_i^0 \\ E_i^0 \\ U_i^0 \end{bmatrix} \quad (58)$$

egyenlettel írhatók le, ahol $\mathbf{R}$ a forgatási mátrix, α , β és γ az északi, keleti és magassági tengelyek körüli elfordulásokat jelöli. A forgatási mátrix elemei

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \beta \cos \gamma & \cos \beta \sin \gamma & -\sin \beta \\ \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma - \cos \alpha \sin \gamma & \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma + \cos \alpha \cos \gamma & \sin \alpha \cos \beta \\ \cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma & \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma - \sin \alpha \cos \gamma & \cos \alpha \cos \beta \end{bmatrix}. \quad (59)$$

Az (58) összefüggésben az α , β és γ szögek a keresett ismeretlenek. Az ismeretlenekre vonatkozóan az egyenlet nem lineáris, ezért az előzetes értékek helyén ki kell számítani az ismeretlenek szerinti deriváltakat, és a lineárizált megfigyelési egyenleteket csak iterációval lehet meghatározni. A legkisebb négyzetes kiegyenlítés a (25) összefüggésnek megfelelően végezhető el. A $\mathbf{v}$ mérési javításokat a vizsgált időpont koordinátáihoz rendeljük, és az $\mathbf{x}$ ismeretlenek az előző lépésben becsült értékek ($\Delta\alpha$, $\Delta\beta$ és $\Delta\gamma$) korrekcióit jelentik. Egy pont esetében az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \partial N_i / \partial \alpha & \partial N_i / \partial \beta & \partial N_i / \partial \gamma \\ \partial E_i / \partial \alpha & \partial E_i / \partial \beta & \partial E_i / \partial \gamma \\ \partial U_i / \partial \alpha & \partial U_i / \partial \beta & \partial U_i / \partial \gamma \end{bmatrix} \quad (60)$$

mátrix parciális deriváltjait az (58) és (59) alapján lehet levezetni. Az ellentmondás vektor a

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} N_i \\ E_i \\ U_i \end{bmatrix} - \mathbf{R}(\alpha, \beta, \gamma) \begin{bmatrix} N_i^0 \\ E_i^0 \\ U_i^0 \end{bmatrix} \quad (61)$$

összefüggéssel számítható. Az $\mathbf{A}$ és $\mathbf{b}$ mennyiségeket mindig az aktuális elfordulások alapján kell újraszámolni. Első lépésben az $\alpha = \beta = \gamma = 0$ értékeket célszerű felvenni.

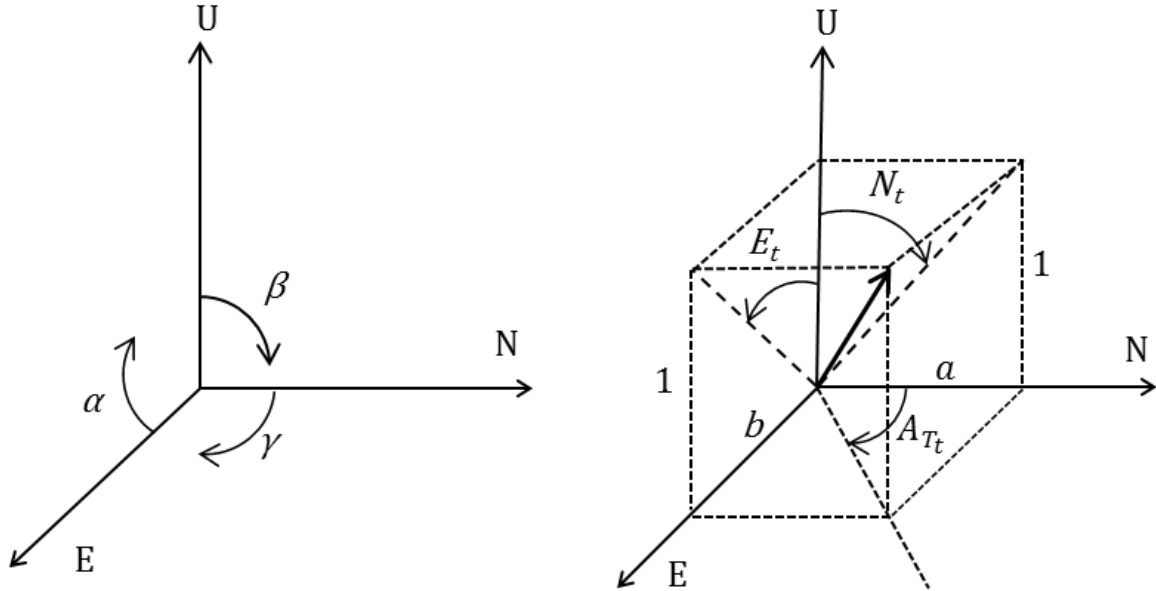
A 6. ábra baloldala a balsodrású rendszerben a tengelyek körüli pozitív elfordulásokat, a jobboldala egy dőlt sík $[a, b, 1]$ koordinátájú normálvektorát mutatja. A 6. ábra alapján az elfordulások és a dölések közötti kapcsolat

$$\begin{aligned} N_t &= \beta \\ E_t &= -\alpha \\ A &= \gamma \\ a &= \tan(N_t) \\ b &= \tan(E_t) \\ T_t &= \tan^{-1}(\sqrt{a^2 + b^2}) \\ A_{T_t} &= \tan^{-1}(b/a) \end{aligned} \quad , \quad (62)$$

ahol N_t és E_t a sík északi és keleti irányú dölése, A a pontcsoport magassági tengely körüli átlagos elfordulásának azimutja, továbbá T_t és A_{T_t} a sík maximális dölése és annak azimutja.

Ha a pontok valóban egy szilárd blokkon helyezkednek el, és a koordinátái csak kis hibával terheltek, a λ méretarányuk egység közeli értéknek kell lenni és a σ_0 értéknek összhangban kell lenni a számításokban szereplő koordináták becsült középhibáival.

Az N_t és E_t paraméterek a fúróluk dölésmérőkkel egy adott pontban közvetlenül mérhetők.



6. ábra. Egy balsodrású koordináta rendszer pozitív forgatásai (baloldal) és egy dőlt sík normálvektora (jobboldal). A normál vektortor koordinátái $[a, b, 1]$, N_t és E_t a sík északi és keleti irányú dölése, továbbá A_{T_t} a maximális dőlés irányának azimutja.

3.4 Idősorok korrelációs és regressziós vizsgálata

A dőlésmérők, a talajvíz és a Duna vízállás adatai közötti összefüggéseket különböző módszerekkel vizsgáltuk.

A Pearson korreláció a

$$c = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \mu_X}{\sigma_X} \right) \left(\frac{Y_i - \mu_Y}{\sigma_Y} \right) \quad (63)$$

összefüggéssel becsülhető, ahol Y valamely vizsgált dőlési komponens, X valamely vizsgált víz komponens, c a becsült korreláció, μ a minta középértéke, σ a minta szórása és n az adatok száma.

A felhasznált két kút adatai és a Duna vízállása által definiált talajvízsík és a vizsgált dőlési komponensek közötti többváltozós lineáris regresszió az

$$Y = r_0 + r_1 W1 + r_2 W2 + r_3 DWL \quad (64)$$

összefüggéssel írható le, ahol $W1$ és $W2$ a kutak vízszintje, DWL a Duna vízállása, r_1 , r_2 és r_3 a keresett regressziós együtthatók, amelyek szintén a (48) legkisebb négyzetes kiegyenlítéssel határozhatók meg.

4. Az alkalmazott vizsgálati módszerekkel elért eredmények

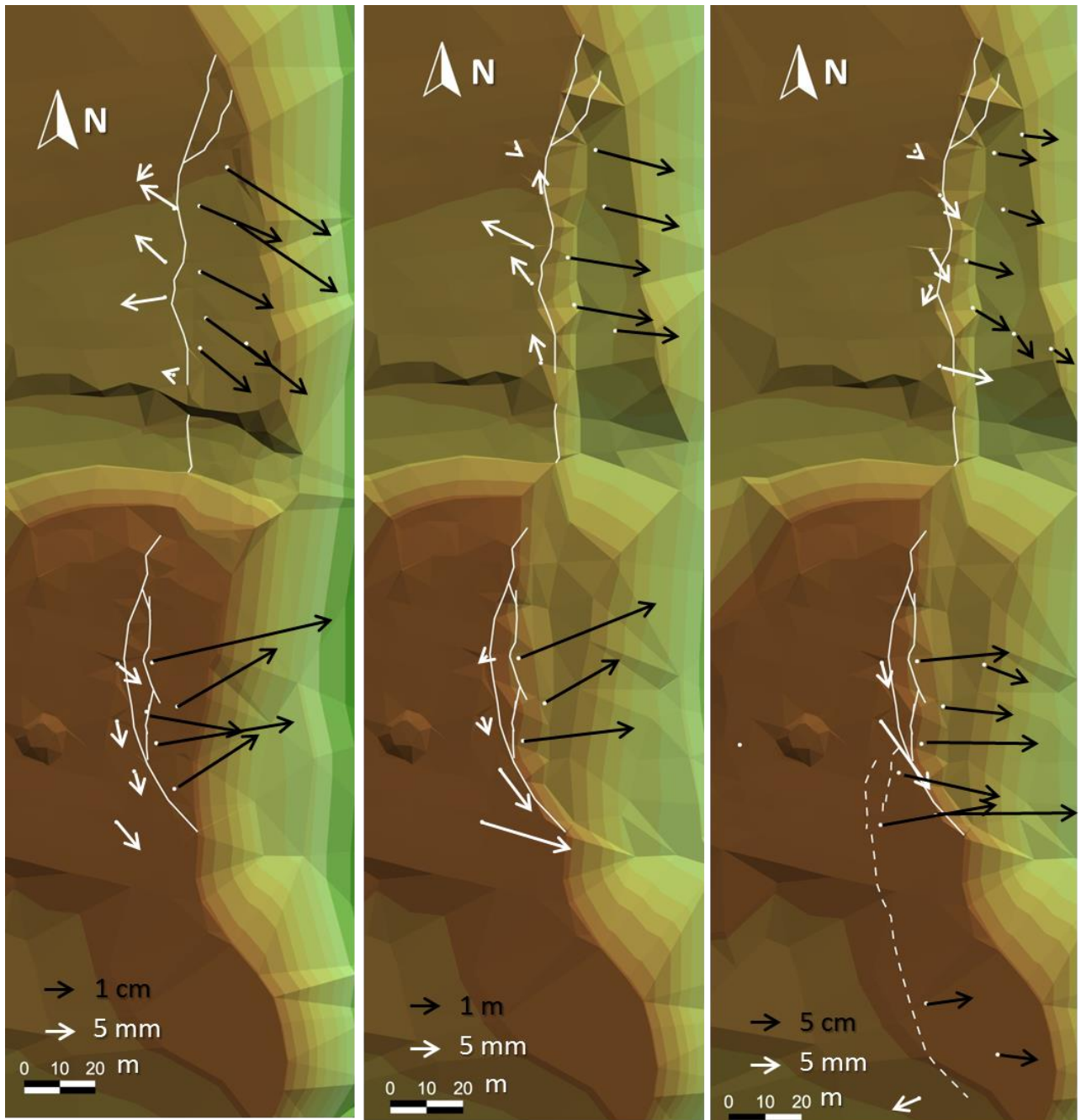
4.1 Geodéziai mérések és koordináta idősorok feldolgozása

A 3.1 fejezetben bemutatott 3D integrált kiegyenlítési eljárással újra feldolgoztuk a 2007-2008 évben végzett GPS és szintezési méréseket is. Az adatfeldolgozás 2009-től már mérőállomás adatokat is tartalmazott. Az adatfeldolgozás végeredménye egy olyan 3D adatsor, ahol a vasbeton mérőpillérek első időponthoz viszonyított koordináta változásainak négyzetösszegét minimalizáltuk. A kiegyenlített koordináták belső pontossága 0.1-0.5 mm közötti értéknek adódott. Külsőpontosság megfelel az előzetesen tervezett 2-3 mm értéknek, amit a mérőpillérek koordináta változásai igazolnak.

A mozgásvizsgálati pontok koordináta változásait az első időpontra vonatkozó ellipszoidi topocentrikus rendszerben (N – északi, E – keleti és U – magassági) is átszámított, ami lehetővé teszi a horizontális és magassági változások vizsgálatát. A mozgásvizsgálati pontok idősorát (N,E és U) grafikusán az I. melléklet mutatja be. Az intenzív leszakadás után a 2007-ben telepített 2000-es és 4000-es pontok idősorát az adott értékekkel eltoltuk a jobb átláthatóság miatt.

A mozgásvizsgálati pontok horizontális elmozdulásait három jellegzetes időintervallumban a 7. ábrán mutatjuk be. A vektorok irányváltozásai jól mutatják a mozgási tendencia változásait az intenzív leszakadás előtti, alatt és utáni periódusokban. Az első intervallum vektorai előlomszik azt a területet ahol a leszakadás során a Duna medrében egy félsziget is megjelent.

Az grafikus idősorok elemzése alapján is jól behatárolhatók az egyes pontok, illetve pontcsoportok hasonló viselkedése. A törési zóna „stabil” nyugati oldalán az 1002 és 3003 pontok az intenzív leszakadás utáni első mérési időpontban még süllyedtek, ezt követően megemelkedtek, majd a maximum elérése után a kezdeti magassághoz tartottak. Ezek a pontok vannak legközelebb a törési zónához. Az 1003, 3000-3002 és 3004 pontok már az intenzív leszakadás utáni első mérési időpontban is megemelkedtek, majd követték az előzőleg bemutatott pontok mozgását.

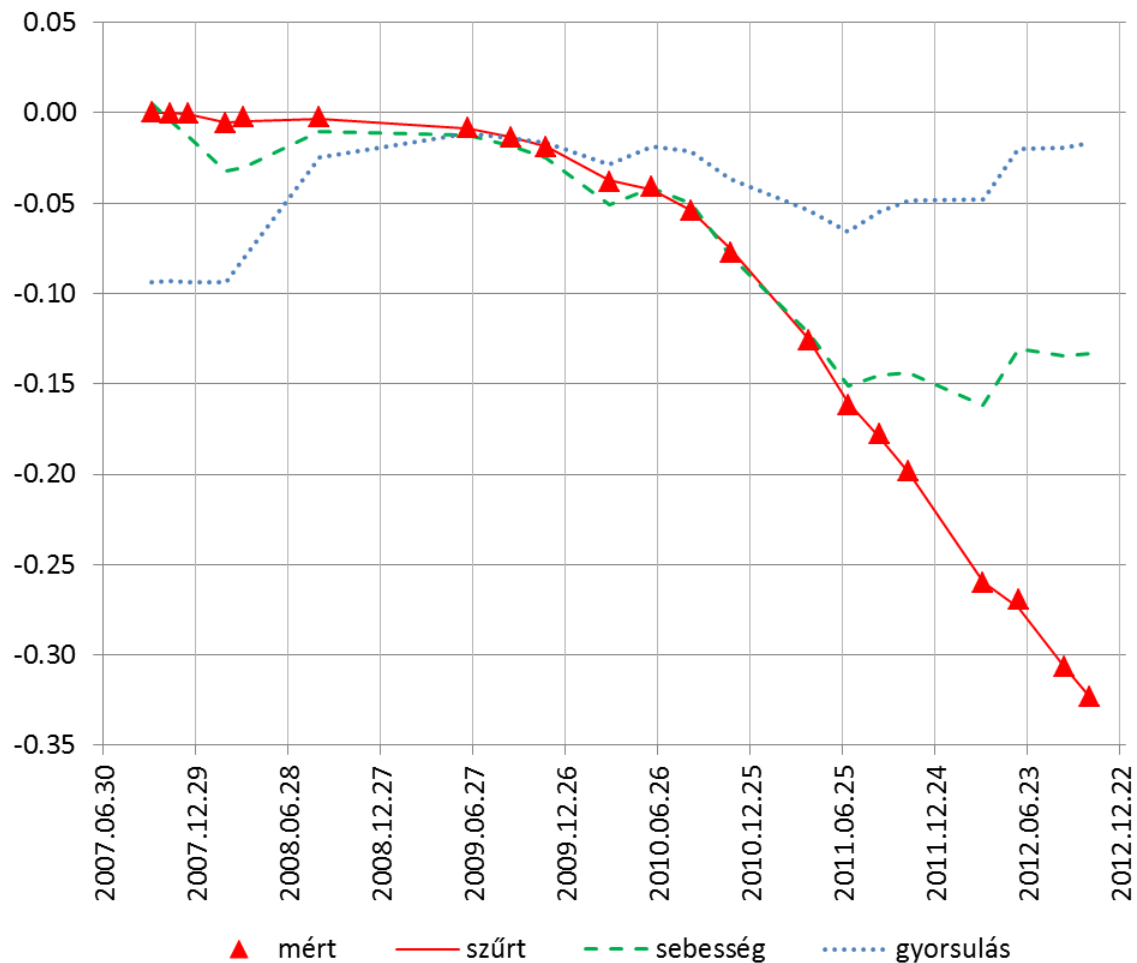


7. ábra. Horizontális koordinátaváltozások 2007.10.3 (első mérési időpont) és 2007.12.13 (leszakadás előtti utolsó időpont) között (baloldali ábra), 2007.12.13 és 2008.02.26 (leszakadás utáni első időpont) között (középső ábra) valamint 2008.02.26 és 2012.10.24 között (jobb oldali ábra). A baloldali ábra a leszakadás előtti, a másik kettő a leszakadás utáni terepmodellt ábrázolja. A folytonos vonal a 2007 évi, a szaggatott vonal a 2010 évi új törési zónát jelöli.

Az 1000 és 1001 pontok a kezdeti időszakban még az 1003 pontra hasonlítottak, de 2009-től a déli (D) és az új (U) blokkhoz hasonló süllyedő tendenciát mutatattak.

Az egyes pontok kinematikai elemzéséhez a magassági változások jellemző időintervallumait vizuális elemzéssel és a Kálmán-szűrés segítségével határoztuk meg. Példaként az 1000 pont

Kálmán-szűrési eredményeit mutatjuk be a 8. ábrán. A gyorsulási és a sebességi értékek változásai segítenek a jellemző intervallumok kiválasztásában. A vizsgálatba bevont intervallumokat az 1. táblázat tartalmazza.



8. ábra. Az 1000 pont Kálmán-szűrése. A mért és szűrt értékek (m), a sebesség (m/y) és a gyorsulás (m/y^2) dimenzióban adottak.

1. táblázat. A kinematikus vizsgálat jellemző intervallumai

Jelölés	Intervallum	megjegyzés
<i>Ia</i>	2007.10.03 – 2007.12.13	2008.02.12. előtt
<i>Ib</i>	2007.10.03 – 2008.02.26	2008.02.12. előtt (1000 és 1001 pont)
<i>II</i>	2008.03.31 – 2009.06.17	2008.02.12. után (1000 és 1001 pont)
<i>IIIa</i>	2009.06.17 – 2010.03.22	2008.02.12. után
<i>IIIb</i>	2009.09.09 – 2010.03.22	2008.02.12. után (1000 és 1001 pont)
<i>IV</i>	2010.06.14 – 2011.04.18	2008.02.12. után
<i>V</i>	2011.07.05 – 2012.03.27	2008.02.12. után
<i>VI</i>	2012.06.05 – 2012.10.24	2008.02.12. után

Az északi (É), déli (D) és az új (U) mozgási zóna pontjainak (töréstől keletre) kinematikus jellemzőit a 2-4 táblázatokban foglaltuk össze. A szignifikáns komponensek student értékeit vastagítással emeltük ki.

Az *Ia* intervallumban (közvetlenül a leszakadás előtt) a nagy sebességek a szignifikánsak, ami konstans erőhatást tükröz. Az északi területen a sebességek -0.820 és -0.496 értékek között, a déli területen -0.595 és -0.345 értékek között mozogtak. Az 2002 pont mozgása nem mértékadó, mivel a süllyedése megrekedt.

2. táblázat. Az északi mozgásos terület pontjainak kinematikus paraméterei. v_0 a pillanatnyi sebesség az intervallum kezdőpontjában, a az intervallum konstans sebessége, σ a középhibákat és t a student értékeket jelöli.

pont	intervallum	v_0 (m/y)	σ_v	t_v	a (m/y ²)	σ_a	t_a
4000	<i>Ia</i>	-0.496	0.049	10.2	1.144	0.465	2.5
	<i>IIIa</i>	-0.038	0.012	3.3	0.026	0.029	0.9
	<i>IV</i>	-0.018	0.011	1.6	-0.061	0.024	2.5
	<i>V</i>	-0.073	0.013	5.5	0.029	0.033	0.9
	<i>VI</i>	-0.093	0.026	3.5	0.185	0.137	1.3
4001	<i>Ia</i>	-0.546	0.053	10.3	1.159	0.506	2.3
	<i>IIIa</i>	-0.041	0.013	3.2	0.033	0.031	1.1
	<i>IV</i>	-0.017	0.012	1.4	-0.060	0.026	2.3
	<i>V</i>	-0.076	0.014	5.3	0.029	0.036	0.8
	<i>VI</i>	-0.111	0.029	3.9	0.268	0.149	1.8
4002	<i>Ia</i>	-0.736	0.071	10.4	1.549	0.681	2.3
	<i>IIIa</i>	-0.033	0.017	2.0	0.009	0.042	0.2
	<i>IV</i>	-0.018	0.016	1.2	-0.063	0.035	1.8
	<i>V</i>	-0.075	0.019	3.9	0.022	0.048	0.5
	<i>VI</i>	-0.101	0.039	2.6	0.203	0.201	1.0
4003	<i>Ia</i>	-0.701	0.250	2.8	1.343	2.397	0.6
4004	<i>Ia</i>	-0.765	0.071	10.8	1.602	0.679	2.4
	<i>IIIa</i>	-0.037	0.017	2.2	0.015	0.042	0.3
	<i>IV</i>	-0.027	0.016	1.7	-0.067	0.035	1.9
	<i>V</i>	-0.093	0.019	4.8	0.026	0.048	0.5
	<i>VI</i>	-0.130	0.038	3.4	0.284	0.200	1.4
4005	<i>Ia</i>	-0.820	0.253	3.2	1.653	2.425	0.7
4006	<i>Ia</i>	-0.667	0.059	11.3	1.392	0.566	2.5
	<i>IIIa</i>	-0.033	0.014	2.3	-0.002	0.035	0.0
	<i>IV</i>	-0.022	0.013	1.7	-0.064	0.029	2.2
	<i>V</i>	-0.086	0.016	5.4	0.022	0.040	0.5
	<i>VI</i>	-0.100	0.032	3.1	0.158	0.167	0.9
4007	<i>IIIa</i>	-0.032	0.003	10.7	0.007	0.007	1.0
	<i>IV</i>	-0.009	0.003	3.3	-0.074	0.006	12.0
	<i>V</i>	-0.076	0.003	22.9	0.019	0.008	2.3
	<i>VI</i>	-0.095	0.007	14.2	0.174	0.035	5.0
4008	<i>IIIa</i>	-0.039	0.005	7.6	0.034	0.013	2.7
	<i>IV</i>	-0.018	0.005	3.7	-0.055	0.011	5.1
	<i>V</i>	-0.064	0.006	11.1	0.018	0.015	1.2
	<i>VI</i>	-0.082	0.012	7.1	0.166	0.061	2.7

3. táblázat. A déli mozgásos terület pontjainak kinematikus paraméterei. v_0 a pillanatnyi sebesség az intervallum kezdőpontjában, a az intervallum konstans sebessége, σ a középhibákat és t a student értékeket jelöli.

pont	intervallum	v_0 (m/y)	σ_v	t_v	a (m/y ²)	σ_a	t_a
2000	<i>Ia</i>	-0.595	0.225	2.6	0.851	2.156	0.4
	<i>Ia</i>	-0.544	0.071	7.6	0.672	0.683	1.0
2001	<i>IIIa</i>	-0.017	0.017	1.0	-0.058	0.042	1.4
	<i>IV</i>	-0.049	0.016	3.0	-0.073	0.035	2.1
	<i>V</i>	-0.122	0.019	6.4	0.026	0.049	0.5
	<i>VI</i>	-0.136	0.039	3.5	0.203	0.201	1.0
	<i>Ia</i>	-0.281	0.133	2.1	0.352	1.280	0.3
2002	<i>Ia</i>	-0.594	0.076	7.9	0.881	0.724	1.2
	<i>IIIa</i>	-0.016	0.018	0.9	-0.060	0.044	1.4
	<i>IV</i>	-0.064	0.017	3.8	-0.052	0.038	1.4
	<i>V</i>	-0.135	0.020	6.6	0.042	0.052	0.8
	<i>VI</i>	-0.161	0.041	3.9	0.276	0.213	1.3
2003	<i>Ia</i>	-0.345	0.056	6.1	-0.329	0.539	0.6
	<i>IIIa</i>	-0.027	0.014	2.0	-0.068	0.033	2.0
	<i>IV</i>	-0.073	0.013	5.7	-0.040	0.028	1.4
	<i>V</i>	-0.137	0.015	9.0	0.061	0.038	1.6
	<i>VI</i>	-0.192	0.030	6.3	0.389	0.159	2.4
2004	<i>IIIa</i>	-0.012	0.008	1.6	-0.059	0.019	3.1
	<i>IV</i>	-0.047	0.007	6.4	-0.056	0.016	3.5
	<i>V</i>	-0.114	0.009	13.1	0.021	0.022	0.9
	<i>VI</i>	-0.128	0.018	7.3	0.184	0.091	2.0

Az északi területen túlnyomó részt a nagy negatív sebességek a dominánsak kisebb pozitív gyorsulás mellett, kivéve a *IV* intervallumot, ahol a negatív gyorsulások a dominánsak, ami az eredő erők növekedésére utal.

Az *Ia* intervallumtól eltekintve mozgási tendenciák hasonlóak az északi és déli területeken, de a sebességek a déli területen nagyobbak, és a domináns negatív gyorsulások korábban a *IIIa* intervallumban jelentkeztek. A 2004 pontnál a *IIIa* intervallumban mind a két komponens azonosan szignifikáns, de egységnyi idő alatt a gyorsulás okoz nagyobb magasságváltozást.

Az új mozgásos területen az 1000 és 1001 pontok különleges viselkedést mutattak. Az *Ib* intervallumban gyakorlatilag nulla sebességgel, kicsi, de szignifikáns gyorsulással jellemezhetők. A *II* intervallum is hasonló, de a szignifikáns gyorsulások most már nagyobbak, ami jelzi a erők növekedését. A *IIIb* intervallumban már a sebességek a dominánsak.

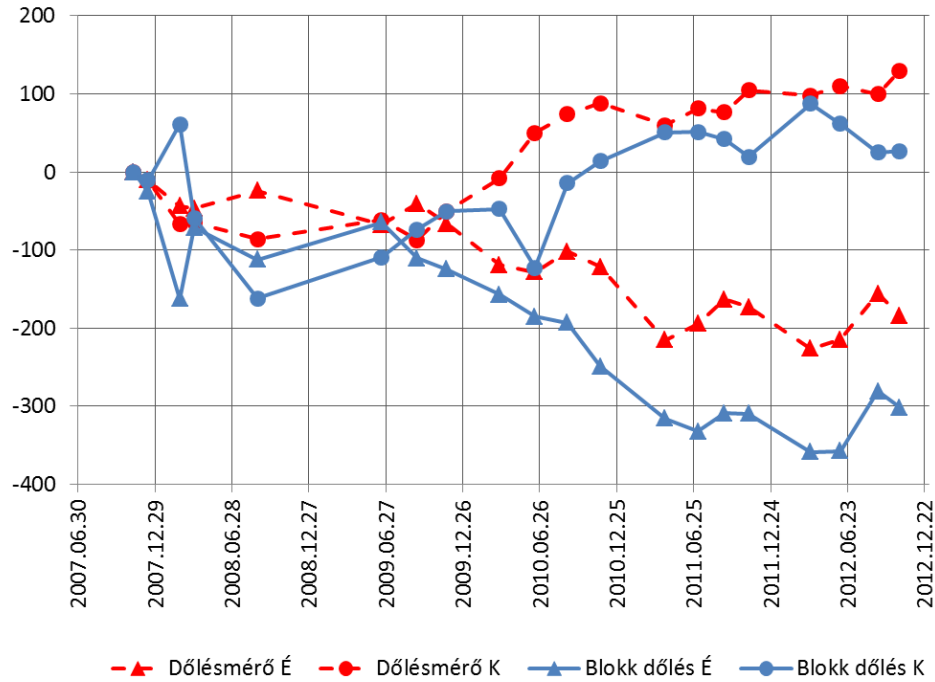
A2009-ben telepített pontoknál a *IIIa* és *IV* intervallumban is a negatív gyorsulások a szignifikánsak, ami szintén a süllyedések gyorsulását mutatja. Az 1005 pontnál a *IIIa* intervallumban mind a két komponens azonosan szignifikáns, de egységnyi idő alatt itt is a gyorsulás okoz nagyobb magasságváltozást. Az déli és az új terület sebességei gyakorlatilag azonosnak tekinthetők.

4. táblázat. A új mozgási terület pontjainak kinematikus paraméterei. v_0 a pillanatnyi sebesség az intervallum kezdőpontjában, a az intervallum konstans sebessége, σ a középhibákat és t a student értékeket jelöli.

pont	intervallum	v_0	σ_v	t_v	a	σ_a	t_a
		(m/y)			(m/y ²)		
1000	<i>Ib</i>	0.005	0.010	0.5	-0.094	0.047	2.0
	<i>II</i>	0.004	0.003	1.3	-0.015	0.004	3.6
	<i>IIIb</i>	-0.026	0.002	16.1	-0.081	0.010	8.5
	<i>IV</i>	-0.066	0.005	14.1	-0.084	0.010	8.0
	<i>V</i>	-0.087	0.005	15.3	-0.131	0.014	9.2
	<i>VI</i>	-0.169	0.011	14.9	1.392	1.936	0.7
1001	<i>Ib</i>	0.006	0.012	0.5	-0.086	0.057	1.5
	<i>II</i>	0.006	0.004	1.6	-0.012	0.005	2.4
	<i>IIIb</i>	-0.013	0.002	6.5	-0.027	0.012	2.3
	<i>IV</i>	-0.019	0.006	3.2	-0.139	0.013	10.8
	<i>V</i>	-0.164	0.007	23.5	0.034	0.018	1.9
	<i>VI</i>	-0.167	0.014	11.9	0.211	0.073	2.9
1004	<i>IIIa</i>	-0.018	0.007	2.7	-0.061	0.017	3.6
	<i>IV</i>	-0.044	0.006	6.9	-0.138	0.014	9.8
	<i>V</i>	-0.169	0.008	22.0	0.068	0.019	3.5
	<i>VI</i>	-0.162	0.015	10.5	0.223	0.080	2.8
1005	<i>IIIa</i>	-0.026	0.008	3.1	-0.063	0.021	3.1
	<i>IV</i>	-0.037	0.008	4.7	-0.137	0.017	7.9
	<i>V</i>	-0.179	0.010	18.9	0.077	0.024	3.2
	<i>VI</i>	-0.139	0.019	7.3	0.086	0.099	0.9
1006	<i>IIIa</i>	-0.018	0.008	2.3	-0.063	0.018	3.4
	<i>IV</i>	-0.026	0.007	3.7	-0.126	0.016	8.2
	<i>V</i>	-0.161	0.008	19.1	0.077	0.021	3.6
	<i>VI</i>	-0.135	0.017	8.0	0.115	0.088	1.3

A pontcsoportok együttes mozgását a 3.3 fejezetben bemutatott eljárással vizsgáltuk. Első lépésben a „stabil” terület 400 pillére, az 1002 és 1003 pontok által definiált sík döléseit vizsgáltuk, amely csak kisebb koordinátaváltozásokat mutatott, de nagyon közel található a T1 fúróluk dőlésmérőhöz. A hálózat mérései időpontjára vonatkozó döléseket a 9. ábrán mutatjuk be. A görbék nagyon jó egyezést mutatnak, különösen az északi komponens esetében, ami azt is igazolja, hogy a pontok koordinátaváltozásai reális értékek.

Az északi (É), déli (D) és az új (U) mozgási zóna pontjainak együttes mozgását az 5-7. táblázatokban és a döléseket a 10. ábrán foglaltuk össze. A sebesség értékekhez hasonlóan a leszakadás előtti időszakban a dölések is nagyobbak voltak, mint az azt követő időszakban. Az északi területen a dölési tendenciák mind a két időszakban hasonlóak, de a déli területen ellentétes irányt mutatnak. A déli területen a leszakadás előtt a T2 dőlésmérő jó egyezést mutatott a koordinátaváltozásokból számított dölésekkel, de a leszakadás után itt is az északi komponensek mutatnak szorosabb összefüggést. A keleti komponensek eltérése a dőlésmérő adatainak helyi jellegével magyarázható. A leszakadás utáni görbék már hasonló jelleget mutatnak, amely rotációs jellegű mozgásra utal. Az új mozgásos terület keleti irányú dölésében azonban irányváltozások „döcögés” is megfigyelhető.



9. ábra. A T1 dőlésmérővel mért és a 400, 1002 és 1003 pontcsoport becsült dőlésesei μrad mértékegységben.

5. táblázat. Az északi blokk pontjainak átlagos elmozdulása (t_N , t_E és t_U), horizontális elfordulása (γ) és dőlési paraméterei (N_t , E_t , T_t and A_{T_t}): a) referencia időpont 2007.10.03, pontok 4000-4006, b) referencia időpont 2007.12.13, pontok 4000-4002, 4004, 4006, c) referencia időpont 2009.06.17, pontok 4000-4002, 4004, 4006-4008, a * jelölésű értékek fokban adottak.

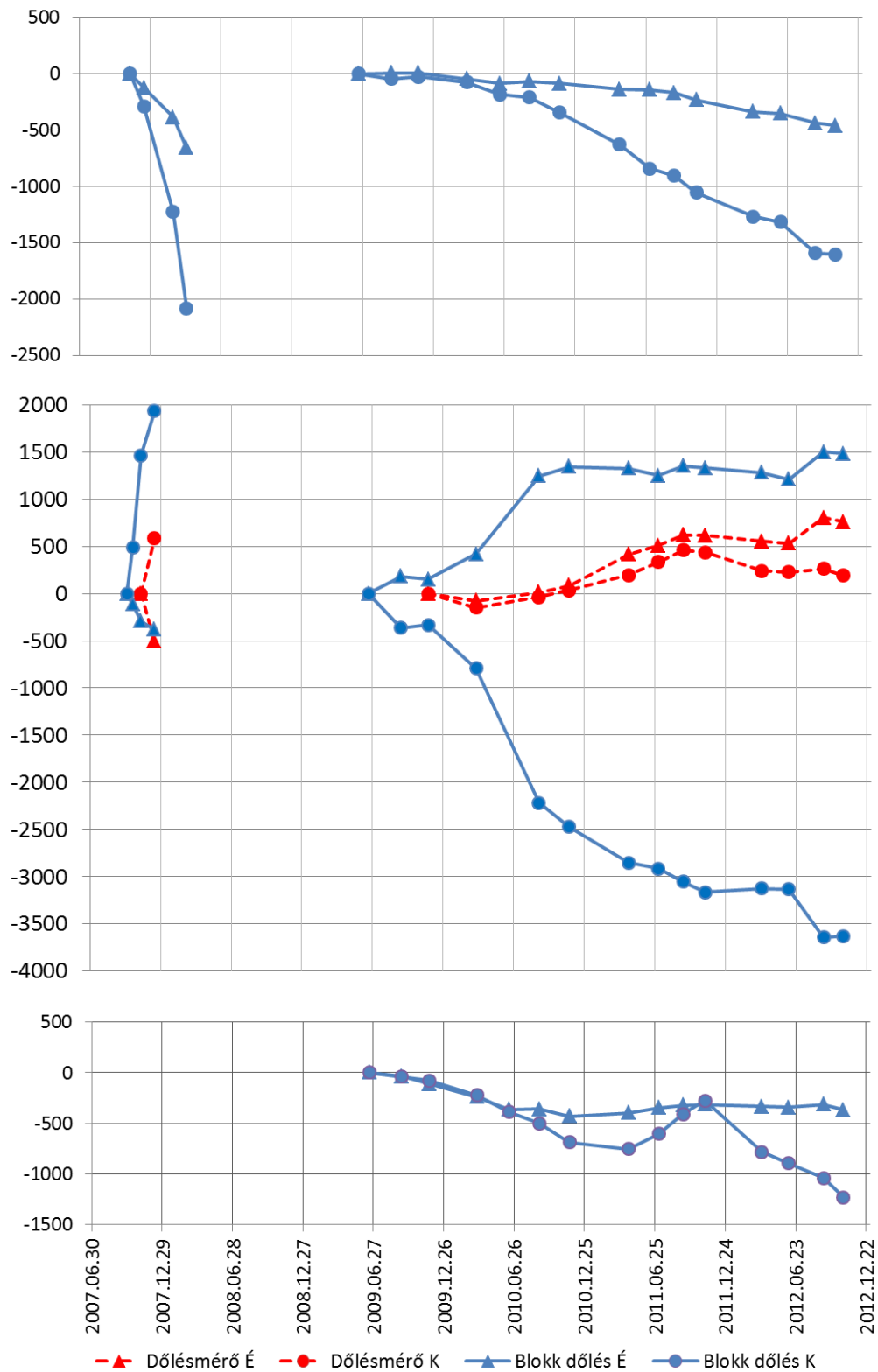
	időpont	t_N	t_E (m)	t_U	γ (fok)	N_t	E_t (μrad)	T_t	A_{T_t} (fok)
a)	18.10.2007	-0.003	0.004	-0.017	0.001	-122.8	-285.9	311.2	-113.2
	08.11.2007	-0.009	0.016	-0.061	0.014	-383.7	-1227.2	1285.9	-107.4
	13.12.2007	-0.016	0.026	-0.101	0.022	-656.2	-2081.0	2182.1	-107.5
b)	17.06.2009	-0.473	2.479	-9.028	0.530	-1.350*	-7.575*	7.692*	-100.1
c)	09.09.2009	-0.002	0.001	-0.008	0.000	8.5	-44.5	45.3	-79.2
	18.11.2009	-0.002	0.003	-0.014	-0.001	7.3	-24.1	25.2	-73.1
	22.03.2010	-0.004	0.008	-0.022	-0.000	-43.8	-75.7	87.4	-120.1
	14.06.2010	-0.007	0.007	-0.023	0.004	-83.4	-182.9	201.0	-114.5
	30.08.2010	-0.005	0.008	-0.028	0.003	-65.6	-210.1	220.2	-107.3
	16.11.2010	-0.008	0.011	-0.037	0.006	-86.8	-343.1	353.9	-104.2
	18.04.2011	-0.008	0.020	-0.060	0.007	-137.0	-628.1	642.9	-102.3
	05.07.2011	-0.006	0.028	-0.080	0.012	-142.7	-838.9	851.0	-99.7
	06.09.2011	-0.010	0.033	-0.094	0.010	-168.5	-903.0	918.6	-100.6
	02.11.2011	-0.011	0.036	-0.103	0.012	-230.9	-1055.4	1080.4	-102.3
	27.03.2012	-0.015	0.048	-0.130	0.014	-337.1	-1267.7	1311.7	-104.9
	05.06.2012	-0.016	0.048	-0.129	0.013	-351.4	-1314.9	1361.0	-105.0
	03.09.2012	-0.019	0.054	-0.148	0.016	-436.0	-1590.5	1649.2	-105.3
	24.10.2012	-0.019	0.059	-0.153	0.018	-457.6	-1602.3	1666.3	-105.9

6. táblázat. A déli blokk pontjainak átlagos elmozdulása (t_N , t_E és t_U), horizontális elfordulása (γ) és dőlési paraméterei (N_t , E_t , T_t and A_{T_t}): *a)* referencia időpont 2007.10.03, pontok 2000, 2001, 2003, 2004, *b)* referencia időpont 2007.12.13, pontok 2001, 2003, 2004, *c)* referencia időpont 2009.06.17, pontok 2001, 2003-2005, a * jelölésű értékek fokban adóttak.

időpont	t_N	t_E (m)	t_U	γ (fok)	N_t	E_t (μrad)	T_t	A_{T_t} (fok)
<i>a)</i> 18.10.2007	0.004	0.008	-0.012	0.005	-112.4	489.7	502.4	103.0
08.11.2007	0.009	0.026	-0.050	0.019	-289.9	1465.9	1494.3	101.2
13.12.2007	0.014	0.041	-0.088	0.037	-379.6	1935.4	1972.3	101.1
<i>b)</i> 17.06.2009	1.208	3.547	-6.962	1.590	1.968*	18.822*	18.910*	84.2
09.09.2009	0.000	0.004	-0.004	-0.014	183.0	-364.1	407.5	-63.3
18.11.2009	0.002	0.008	-0.014	-0.013	150.4	-330.8	363.4	-65.5
22.03.2010	0.001	0.015	-0.031	-0.016	419.7	-792.5	896.7	-62.1
30.08.2010	0.004	0.023	-0.049	-0.013	1247.2	-2216.7	2543.5	-60.6
16.11.2010	0.003	0.036	-0.067	-0.021	1344.2	-2474.8	2816.3	-61.4
<i>c)</i> 18.04.2011	-0.001	0.057	-0.105	-0.042	1326.5	-2853.1	3146.4	-65.1
05.07.2011	0.004	0.070	-0.139	-0.057	1248.9	-2914.6	3170.9	-66.8
06.09.2011	-0.001	0.079	-0.157	-0.054	1350.9	-3052.8	3338.3	-66.1
02.11.2011	-0.002	0.086	-0.180	-0.070	1332.2	-3167.4	3436.1	-67.2
27.03.2012	-0.003	0.109	-0.221	-0.073	1279.8	-3127.5	3379.2	-67.7
05.06.2012	-0.004	0.111	-0.226	-0.075	1212.0	-3133.8	3360.0	-68.9
03.09.2012	-0.004	0.124	-0.256	-0.089	1501.5	-3643.3	3940.6	-67.6
24.10.2012	-0.007	0.129	-0.266	-0.095	1482.6	-3630.4	3921.4	-67.7

7. táblázat. Az új mozgási blokk pontjainak átlagos elmozdulása (t_N , t_E és t_U), horizontális elfordulása (γ) és dőlési paraméterei (N_t , E_t , T_t and A_{T_t}): *c)* referencia időpont 2009.06.17, pontok 1000, 1001, 1004-1006.

időpont	t_N	t_E (m)	t_U	γ (fok)	N_t	E_t (μrad)	T_t	A_{T_t} (fok)
09.09.2009	-0.003	-0.002	-0.006	0.004	-35.7	-41.2	54.6	-131.0
18.11.2009	-0.002	0.004	-0.012	0.002	-110.0	-77.8	134.8	-144.7
22.03.2010	-0.006	0.014	-0.029	0.006	-239.4	-225.4	328.8	-136.7
14.06.2010	-0.007	0.017	-0.032	0.014	-367.0	-388.3	534.3	-133.3
30.08.2010	-0.005	0.019	-0.042	0.010	-360.1	-502.1	617.8	-125.6
16.11.2010	-0.010	0.029	-0.061	0.017	-431.4	-688.1	812.2	-122.1
<i>c)</i> 18.04.2011	-0.012	0.055	-0.108	0.032	-399.7	-756.7	855.8	-117.8
05.07.2011	-0.012	0.075	-0.151	0.046	-349.1	-607.1	700.3	-119.9
06.09.2011	-0.014	0.087	-0.173	0.047	-322.1	-409.8	521.2	-128.2
02.11.2011	-0.015	0.098	-0.200	0.057	-315.3	-276.7	419.5	-138.7
27.03.2012	-0.014	0.121	-0.254	0.071	-336.1	-782.6	851.7	-113.2
05.06.2012	-0.012	0.125	-0.262	0.074	-342.2	-895.3	958.4	-110.9
03.09.2012	-0.013	0.138	-0.295	0.084	-314.4	-1042.0	1088.4	-106.8
24.10.2012	-0.011	0.145	-0.309	0.089	-369.0	-1231.1	1285.3	-106.6

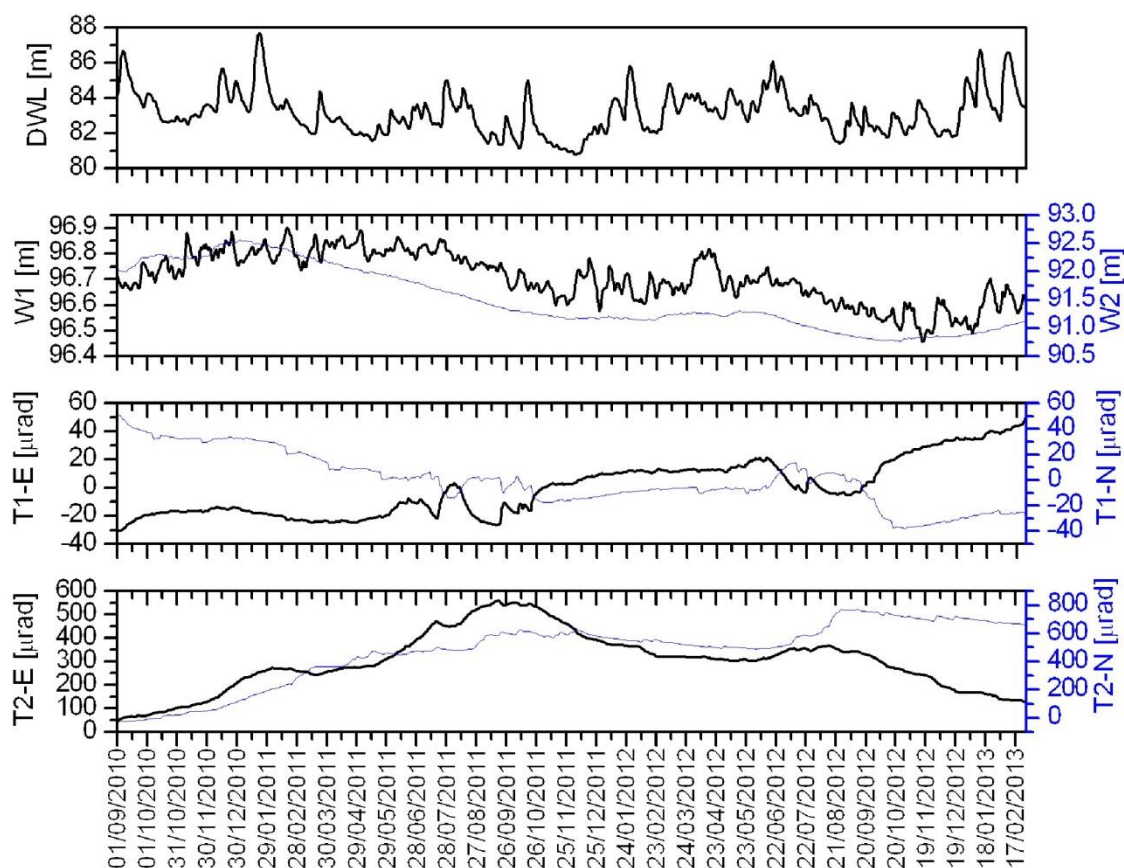


10. ábra. Az északi (fent), a déli (középen) és az új mozgási zóna (lent) dölései μrad mértékegységben. A középső ábra a T2 dőlésmérő adatait is tartalmazza. Az intenzív leszakadás előtti görbék referencia időpontja 2007.10.03, az azt követő időszaké 2009.06.17.

4.2 A Fúrólyuk dőlésmérések és a vízszint adatok feldolgozása

Az előző fejezettől eltérően a dőlésmérő és víz adatok nagyobb felbontásban is a rendelkezésünkre állnak, ami lehetővé teszi a 3.4 fejezetben bemutatott vizsgálatokat is. A 2010.09.01 és a 2013.02.27 közötti napi átlagokat a 11. ábrán mutatjuk be. Annak ellenére, hogy a kút adatok között szemmel láthatóan is nagy az összefüggés, az alacsonyabban lévő kút értékei a magasabban lévő kúthoz viszonyítva nagyon sima görbét mutatnak.

A Pearson korrelációs számításokat és a többváltozós lineáris regressziós vizsgálat eredményeit a 8. táblázatban foglaltuk össze.



11. ábra. A Duna vízállás (DWL), a kutak (W1, W2), a fúrólyuk dőlésmérők északi irányú (T1-N , T2-N) és keleti irányú (T1-E , T2-E) döléseinek napi átlagértékei.

8. táblázat. A Duna vízállása (DWL), a kutak (W1, W2) és a T1 , T2 fúrólyuk dőlésmérők közötti regresszió és korreláció analízis eredményei.

Dőlésmérő	Többváltozós lineáris regresszió			Pearson korreláció		
	W2	W1	DWL	W2	W1	DWL
	r_1	r_2	r_3	c	c	c
	($\mu\text{rad/m}$)	($\mu\text{rad/m}$)	($\mu\text{rad/m}$)			
T1 Kelet	-24.2	-36.0	4.4	-0.773	-0.704	0.135
T1 Észak	35.6	-25.7	1.0	0.859	0.639	0.228
T2 Kelet	-208.5	1028.1	-28.4	-0.336	0.044	-0.396
T2 Észak	-434.3	575.8	-20.3	-0.904	-0.623	-0.298

A vizsgálatok azt mutatják, hogy a dölések és a Duna vízállása között nincs szignifikáns korrelációs összefüggés. Ez szintén igaz a kutak és a T2 dőlésmérő keleti komponensénél is. Ennek ellenére a többváltozós lineáris regressziós analízis viszont szignifikáns összefüggéseket mutat a kutak és a T2 dőlésmérő adatai között. A kutak és a T2 komponensek regressziói ellentétes előjelűek, a magasabban lévő és a mozgó területekhez közelebb lévő W1 kútnak nagyobbak a regressziós értékei. A talajvízszint 1 m emelkedése 1028.1 μ rad keleti irányú és 575.8 μ rad északi irányú dölést eredményez. A W2 kútban a talajvízszint 1 m emelkedése 208.5 μ rad nyugati irányú és 434.3 μ rad déli irányú dölést eredményez. A Duna vízállás változása hasonló a W2 kút hatásához, de egy nagyságrenddel kisebb.

Összességében megállapítható, hogy a talajvíz adatok jelentős szerepet játszanak a magaspárt stabilitásában.

4.3 A végeselem vizsgálatok eredményei

A BME Geotechnika Tanszéke által elvégzett részletes talajmechanikai vizsgálatokat egy külön tanulmány tartalmazza. Ebben a beszámolóban csak a geodéziai vizsgálatok szempontjából fontos eredményeket foglaljuk össze.

Az alkalmazott Plaxis 2D (Version 2011.02) programcsomaggal különböző talajjellemzők, vízszintes és ferde rétegzettségek, anizotrópia, húzási repedezettségek és rogyásos suvadás feltételezésével sem lehetett teljes mértékben reprodukálni a geodéziai mérésekkel kapott eredményeket és a terepi bejárás tapasztalatait.

Az alkalmazott módszerrel nem jelezhető előre pontosan a csúszólap felső kiindulási pontja és az áthalmozott rétegek alatti Duna mederben történő kibúvása. A csúszólapok felszínén észlelhető kiindulási pontjai alapján sem lehet az alakjukra vonatkozóan megfelelő következtetéseket levonni. A szakadási síkok (elnyíródás) kialakulása után a mozgások ezzel a programmal már nem modellezhetők.

A ferde gyenge síkok csak kis mértékben, az agyagréteg dőlt felszínén levő felpuhult rétegek jelentősebben csökkentik az állékonyságot, változtatják a csúszólap alakját.

5. A partcsuszamlás általános modellje

A Dunamenti magaspárt csuszamlások szerteágazó szakirodalma és az előző fejezetekben bemutatott vizsgálatok eredményei alapján is megállapítható, hogy Dunaszekcső térségében is egy nagyon összetett jelenséggel állunk szembe, amely csak nehezen sorolható be a klasszikus földcsuszamlási, geomorfológiai modellek sorába.

A végeselem vizsgálatok alapján is valószínűsíthető rotációs modellt a geodéziai hálózati mérések és fúróluk dőlésmérések csak részben támasztják alá. Az északi mozgásos területen az intenzív leszakadás során a modellnek megfelelően csak 7.692 fok nyugati dölést mértünk. A déli területen mért 18.910 fok dőlés ellentétes, keleti irányban jelentkezett, ami a csúszásos folyamat megrekedésére utal. Ezt igazolja az a tény, hogy az intenzív leszakadás utáni mozgások már követik a rotációs modellre jellemző dőlés irányokat.

A mozgási folyamatokat leginkább a vertikális elmozdulások és a törési zóna lényegében függőleges szakadó lapjai jellemzik, ami a rogyásos földcsuszamlások jellegzetessége.

Az egyedi pontmozgások kinematikai modellje jól jellemzi a mozgási folyamatok szakaszosságát. A Newtoni mechanika alapján a gyorsulások és sebességek dominanciájából következtethetünk az mozgásokat okozó eredő erők változására, vagy állandóságára. Az intenzív leszakadás után kisebb mozgásokat tapasztaltuk. A nyári időszakot 2009 és 2011-ben

a magassági változások lassulása jellemezte, ami valószínűleg a száraz időszakokkal van kapcsolatban. 2010-ben ez a jelenség kevésbé szemléletes, de az év eleji és év végi időszakokat itt is eltérő mozgási tendenciák jellemzik.

A dölések és a talajvízszint (W1, W2 kutak) kapcsolatát a többváltozós lineáris regressziós vizsgálatok is alátámasztották, és a felpuhult rétegek hatást a végeselem modellezés is igazolta. A geomorfológiai szakirodalomban a Duna alámosó hatása elfogadott elmélet, ami első sorban a leszakadt előtér anyagszállításáért felelős. A magas vízállás ugyan megemelheti a lábvonalban a talajvíz szintjét, de ennek közvetlen hatását a méréseink nem igazolták.

A rogyásos komponenst nagy valószínűséggel az évtizedek során jelentősen megemelkedett talajvízszint okozhatta, amely a barna fosszilis anyagokat is tartalmazó rétegek felpuhulásához vezetett. A rétegek plasztikussá válása csökkent a rétegek kohézióját és belső súrlódást, ami nyírószilárdság jelentős csökkenéséhez vezet. A felső száraz rétegek önsúlya megnöveli az átázott, talajvizet is tartalmazó rétegek pórusnyomását. Az intenzív leszakadás után ezek a rétegek csúsztak a talpvonal alatt a Duna medrébe új félszigetet létrehozva. A partmozgások aktivizálódása során és az intenzív leszakadása után is tapasztalható volt az anyagok szakaszos és gyors kiáramlása, a „pipálás” a magaspart alól. (Két alkalommal ezt mi is tapasztaltuk, erről egy fényképet is készítettünk.)

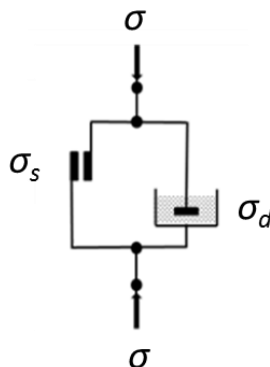
A domináns rogyásos folyamat emlékeztet a közetmechanikában ismert rugalmas viszkoplasztikus modellre. A lössz rétegek azonban lényegesen eltérnek az ideális rugalmas közetek tulajdonságaitól, a rétegek terhelése során irreverzibilis deformációk tapasztalhatók. Az analógia alapján feltételezhető „kvázi” rugalmas viszkoplasztikus modellt a 12. ábrán mutatjuk be, ahol a magasan elhelyezkedő szilárd rétegek önsúlyából származó feszültséggel a szilárd rétegekben ébredő csúszási (nyíró) feszültségnek és a plasztikus rétegekben ébredő csillapító (pórus) feszültségnek kellene egyensúlyban lennie. A mozgási folyamatot a következő fázisokkal lehet jellemezni:

- A felpuhult plasztikus rétegek már nem tudják megtartani a magasan elhelyezkedő szilárd rétegek önsúlyát, a szilárd rétegek deformálódnak, a kialakuló húzási repedések szabad szemmel még nem láthatók, de geodéziai mérésekkel már megfigyelhetők.
- A nyíró feszültséget a szilárd rétegek már nem tudják felvenni, a repedések és a fő törési zóna már szabad szemmel is megfigyelhető, a mozgások a külső körülményeknek megfelelően növekvő tendenciát mutatnak, a plasztikus, nyomás alatti rétegek szakaszosan kiáramolhatnak a legkisebb ellenállás irányába.
- Ha a nagy pórusvíznyomás alatt lévő rétegek a legkisebb ellenállás irányába nagy mennyiségben tudnak kiáramolni, néhány óra alatt is nagy, intenzív mozgások jelentkezhetnek. Ennek a fázisnak nem feltétlenül kell bekövetkeznie.
- Az anyagkiáramlások lassan megszűnnek, a mozgások lelassulnak, és ismét kialakulhat az egyensúlyi állapot.

A bemutatott mozgási folyamat megfelelő körülmények között rendszeresen megismétlődhet.

Az 1002, 1003 és 3000-3004 pontok intenzív leszakadás utáni megemelkedése szintén az anyagáramlásra vezethető vissza, mivel feltételezhető, hogy az anyag ellentétes irányban is mozoghatott. A magasságok eredeti szintre történő visszatérése szintén az utófázisra jellemző mozgásokkal van összhangban.

A partfalmozgások tehát lényegében rogyásos, részben rotációs folyamatként jellemezhetők, amelyek szoros összefüggésben vannak a talajvízszint változással és a Duna alámosása során kialakult gyenge zónával, amely az anyagkiáramlás egyik nagyon fontos feltétele.



12. ábra. A rogyásos partmozgás „kvázi” rugalmas viszkoplasztikus modellje, ahol σ az önsúlyból származó feszültség, σ_s a nyírási és σ_d a csillapító feszültség.

6. Az új tudományos eredmények összefoglalása

A nagy pontosságú integrált geodéziai hálózat létesítésére olyan GPS mérési stratégiát dolgoztunk ki, amely öt vevő együttes alkalmazásával nagyszámú fölös mérést biztosít. A szintezési mérések integrálása megnövelte a magassági komponens megbízhatóságát. A mérőállomás és a pillérmagasság meghatározására olyan egyszerű szerkezeteket terveztünk, amellyel a pontra állás a GPS technikával azonos pontossággal végezhető el.

Egy új eljárást dolgoztunk ki a GPS vektorok, a szintezett magasságkülönbségek és a mérőállomás mérések geocentrikus koordináta rendszerben történő szabatos integrált 3D kiegyenlítésére. A kiegyenlítés során a mérőállomás esetében a függővonal elhajlás komponensei, a magasságkülönbségek esetében a geoidunduláció különbségek is mérésenként kezelhetők. A GPS vektoroknál elfordulási hibák kezelhetők mérési hibaként, valamint megfelelő számú fölös mérés esetében méretarány eltérések és fáziscentrum külpontosságok is ismeretlenként kezelhetők. A mérőállomásoknál kvázi lineáris megfigyelési egyenleteket vezettünk be, amelyek lényegesen kedvezőbbek a hagyományos eljárásnál.

Az egyedi pontmozgások numerikus vizsgálathoz legkisebb négyzetes kinematikai modellillesztést és Kálmán-szűrést alkalmaztunk. A Kálmán-szűrést a jellemző mozgási tendenciájú időintervallumok azonosítására használtuk. A domináns sebességek és gyorsulások jól mutatták a mozgások időszakonkénti jellegzetességeit, a mozgást okozó eredő erők változásait és állandóságát.

A pontcsoportok együttes mozgását hét paraméteres hasonlósági transzformáció alkalmazásával vizsgáltuk. Az elfordulásból levezettük a pontcsoportok dőlésének jellemző paramétereit, amelyek fűrőlyuk dőlésmérőkkel közvetlenül mérhetők. Kimutattuk, hogy szilárd blokkok estében a két technológia hasonló eredményeket szolgáltat. A dőlésmérők ugyan egyetlen pontban, de nagyobb időbeli felbontásban szolgáltatnak adatokat.

A dőlésmérők és a hidrológiai adatok analíziséből kimutattuk, hogy a közvetlen dölések a talajvízszint ingadozásokkal vannak kapcsolatban. A Duna vízállása ebből a szempontból nem releváns.

A geodéziai és hidrológiai adatok, valamint a végelelem modellezés alapján megállapítottuk, hogy a vizsgált jelenségek lényegében rogyásos, részben rotációs folyamatként jellemezhetők, ahol az átázott, pórusvíznyomás alatti rétegek és a part menti gyenge zóna jelenléte nagyon fontos szerepet játszik. A teljes mozgási folyamatot egy több fázisból álló modellel írtuk le.

Az OTKA kutatásokhoz kapcsolódó publikációk

- Újvári G, Bányai L, Gyimóthy A, Mentés Gy: A dunaszekcsői földcsuszamlás geodéziai mozgásvizsgálatának eredményei, *Geodézia és Kartográfia* LXI, (07), 11-17., 2009
- Újvári G, Mentés Gy, Bányai L, Kraft J, Gyimóthy A, Kovács J: Evolution of a bank failure along the River Danube at Dunaszekcső, Hungary., *Geomorphology* 109, 197-209, 2009
- Újvári G., Bányai L., Mentés G., Gyimóthy A., Holler I.: A dunaszekcsői csuszamlás mozgásvizsgálata. *Geomatikai Közlemények* XII. 233-239., 2009
- Újvári G, Bányai L, Gyimóthy A, Mentés Gy: The Dunaszekcső landslide and post event movements: possible southward spread?, *EGU General Assembly*, May 3-7. 2010, Abstract Nr. 3392., 2010
- Bányai L: Geodéziai mérések integrált 3D kiegyenlítése, *Geomatikai Közlemények* XIV/1. 45-54, 2011
- Bányai L: Rigorous 3D Integrated Adjustment of GPS Baselines, Geodetic Total Station and Levelling Measurements, *Proceedings*, FIG web site, ISBN 978-87-90907-92-1, 2011
- Mentés Gy, Bányai L, Újvári G, Papp G, Gribovszki K, Bódis VB: Recurring Mass Movements On The Danube's Bank at Dunaszekcső (Hungary) Observed by Geodetic Methods., *Proceedings of the Joint International Symposium on Deformation Monitoring*. Hong Kong, China, 2-4 November 2011., 2011
- Újvári G, Bányai L, Mentés Gy, Papp G, Gribovszki K, Bódis VB, Bokor Zs: Utómozgások a dunaszekcsői magasparton, *Geomatikai közlemények* XIV/1. 105-110, 2011
- Bányai L: Some remarks on linear least-squares fits with errors in both coordinates, *Acta Geod. Geoph Hung.* Vol 47(4) pp. 441-452, 2012
- Bányai L, Újvári G, Mentés Gy: Kinematics and dynamics of a river bank failure determined by integrated geodetic observations - case study of Dunaszekcső landslide, Hungary, *Geology and Earth sciences*, ISSN 2251-3353, pp 51-54, 2012
- Mentés Gy, Bányai L, Újvári G, Papp G, Gribovszki K, Bódis V B: Recurring mass movements on the Danubes' bank at Dunaszekcső (Hungary) observed by geodetic methods, *Journal of Applied Geodesy*, volume 6, number 3-4, pp 203-208, 2012
- Bányai L. Three-dimensional adjustment of integrated geodetic observables in Earth-centred and Earth-fixed coordinate system. *Acta Geod Geophys.* Vol 48(1) pp.163-177 ,2013
- Bányai L, Újvári G, Mentés Gy: A dunaszekcsői földcsuszamlás mozgási tendenciája és modellje koordináta idősorok alapján. *Geomatikai Közlemények* XVI, 2013. pp 73-82
- Bányai L, Újvári G, Mentés Gy: A dunaszekcsői magaspartsuszamlás geodéziai megfigyelése. *Geodézia és Kartográfia*, 2013/11-12. 65. Évf. pp 7-11
- Bányai L, Újvári G, Mentés Gy, Kovács M, Czap Z, Gribovszki K, Papp G: Recurrent landsliding of a high bank at Dunaszekcső, Hungary: geodetic deformation monitoring and finite element modeling. *Geomorphology* (elfogadva 2013 november)

Az OTKA kutatásokhoz kapcsolódó előadások (az előadó nevével)

- Bányai L: Geodéziai mérések integrált 3D kiegyenlítése, Geomatika Szeminárium, Sopron, 2010.
- Újvári G: Utómozgások a dunaszekcsői magasparton, Geomatika Szeminárium, Sopron, 2010.
- Bányai L: Rigorous 3D Integrated Adjustment of GPS Baselines, Geodetic Total Station and Levelling Measurements, FIG Working Week, Marrakech, Morocco, 2011.
- Mentes Gy: Recurring Mass Movements On The Danube's Bank at Dunaszekcső (Hungary) Observed by Geodetic Methods., Joint International Symposium on Deformation Monitoring. Hong Kong, China, 2011.
- Bányai L: A dunaszekcsői földcsuszamlás mozgási tendenciája és modellje koordináta idősorok alapján, VIII Geomatika Szeminárium, Sopron, 2012.
- Gribovski K: Dunaszekcső földrengés-veszélyeztetettsége, VIII Geomatika Szeminárium, Sopron, 2012.
- Bányai L: Kinematics and dynamics of a river bank failure determined by integrated geodetic observations - case study of Dunaszekcső landslide, GEOS Conference, Singapore, 2012.
- Horváth A: A dunaszekcsői mozgásvizsgálati hálózatban használt nagy pontosságú mérőműszerek kalibrációs eljárásainak fejlesztése az MTA CSFK GGI kalibráló laboratóriumában. 51. Bányamérő továbbképző és tapasztalatcsere, Székesfehérvár, 2012.
- Ujvári G: A dunaszekcsői csuszamlás mozgás jellemzői: végelem modellezési és geodéziai adatok, VIII Geomatika Szeminárium, Sopron, 2012.
- Bányai L: A dunaszekcsői magaspart geodéziai mozgásvizsgálata. Zielinski Szilárd Konferencia, BME, Budapest, 2013.
- Bányai L: A dunaszekcsői partcsuszamlás geodéziai megfigyelése. MFTTT Vándorgyűlés, Sopron, 2013.
- Bányai L: Investigation of high bank failures by Geodetic Methods in the territory of Dunaszekcső (Magaspart csuszamlások vizsgálata geodéziai módszerekkel Dunaszekcső térségében.) International Workshop in Environmental Security and Management, Sopron, 2013.
- Mentes Gy.: Rutschungsprozesse des Hochufers der Donau bei Dunaszekcső in Ungarn. Herbsttagung des Arbeitskreises Geodäsie/Geophysik, Heppenheim, Németország, 15.10.2013-18.10.2013.

A Melléklet: *A mozgásvizsgálati pontok koordinátaváltozásai*

