RÉSZLETES ZÁRÓJELENTÉS

A kutatás előrehaladása a tervezettnek megfelelően jó ütemű volt. A kutatás teljes ideje alatt folyamatosan értünk el igen figyelemre méltó eredményeket, amelyek közül sokat nemzetközi konferenciákon bemutathattunk az OTKA támogatásának segítségével. A későbbiek folyamán az eredményeket igen jó színvonalú nemzetközi folyóiratokban publikáltuk, amint azt a közleményjegyzék is meggyőzően mutatja. A munkában részt vevők személyében nem történt változás, ilyen típusú probléma ill. akadály nem merült fel.

A költségtervtől történő jelentősnek tekintett eltérés nem volt. Időbeli eltolódás időnként felléphetett, általában az ismert pénzügyi rendelkezések (pl. időleges beszerzési tilalom) következtében, ezeket azonban sikerült áthidalni. Így ez végeredményben nem befolyásolta hátrányosan a kutatás eredményességét, jóllehet örömmel vettük volna, ha erre egyáltalán nem kerül sor. Kellemetlen volt, hogy a kutatóhely (BME) belső szabályozása külföldi kutatók meghívását és vendéglátását sajnálatosan megnehezíti.

Megemlítem a kutatás egyik sajátos vonását, amelyben én jóval több pozitívumot látok, mint negatívumot: a szép számú közleményben ritka az olyan, amelyben a három résztvevő közül legalább kettő szerzőtársként szerepelne, ugyanakkor az egyéb kül- vagy belföldi szerzőtársak száma nem kevés. Ez azt mutatja, hogy a fiatalabb résztvevők is kellő önállóságot és nemzetközi eredményességet tudtak felmutatni, amivel az idősebb vezető kutató is maradéktalanul elégedett.

A fenti körülmény indokolja, hogy az eredmények részletes ismertetését a résztvevő kutatók személye szerint csoportosítsuk.

A tervezett kutatási részirányok közül Nagy Béla szerzőtársaival ill. egyedül nemnegatív mátrixok inverz spektrálelméletének kérdéseiről a következő eredményeket érte el.

Nagy B Inverse elementary divisor problems for nonnegative matrices c. dolgozatában Henryk Minc három kérdését válaszolja meg elemenként nemnegatív ill. kétszeresen sztochasztikus mátrixok előírt elemi osztókkal történő realizálásáról. A válaszok közül egy pozitív, kettő negatív irányú. A pozitív irányú: ha N>3, a:=-1/(N-1), és e2,e3,…,eh pozitív egészek összege N-1, akkor létezik olyan kétszeresen sztochasztikus N-edrendű matrix, amelynek elemi osztói z-1, (z-a)^e2, (z-a)^e3, …, (z-a)^eh. A két negatív irányú példa lényege: plauzibilis feltételek ellenére megtörténik, hogy nincs nemnegatív mátrix az előírt elemi osztókkal, vagy: nincs nemnegatív diagonalizálható mátrix előírt spektrummal.

K-H. Försterrel és Szilvási M-val közös dolgozatában (Local inverse spectrum theorems for real and nonnegative matrices) lokális jellegű inverz spektrum tételeket igazolt valós, nemnegativ ill. pozitiv elemű mátrixokra. A bizonyítások módszere konstruktív: azon felül, hogy igazolja előírt spektrumú valós, … mátrix létezését, lehetővé teszi felírásukat. A kapott eredmények a következő típusúak:

Feltételezve, hogy adott lista (komplex számok véges sorozata) a spektruma egy valós, … mátrixnak, bizonyos további feltétel teljesül, és egy másik lista ún. pseudo-távolsága az adottól elegendően kicsi, akkor a másik lista is spektruma ugyanolyan típusú (azaz valós, …) mátrixnak. Két ilyen lista m(L,M) pszeudo-távolsága (matching distance) definíció szerint min ||L-PM||, ahol a minimum a (véges dimenziós) tér összes P permutációira veendő, a szereplő norma pedig az l(végtelen) norma. Ezen eredmények hasznosak lehetnek nemnegatív lineáris rendszerek perturbációinak vizsgálatában.

A lineáris operátorok elméletében (végtelen ill. véges dimenziós Banach ill. Hilbert terekben) Nagy B (részben K-H Förster szerzőtársával együtt) elért főbb eredményei a következők:

A J Operator Theoryban közölt cikkében (Multiplicities, generalized Jacobi matrices, and symmetric operators) Nagy B vizsgálta általános nemkorlátos operátorok multiplicitásait. Vizsgálta ezek kapcsolatát általánosított (reguláris vagy irreguláris, blokk) Jacobi mátrixokkal. Meghatározta tiszta maximális szimmetrikus operátorok multiplicitását, és megkapta az elemi szimmetrikus operátorok legegyszerűbb mátrix reprezentációját, amely kérdés megoldatlan maradt Neumann János egyik nevezetes klasszikus dolgozatában.

A J Functional Analysisben megjelent cikkében (Multicyclicity of unbounded normal operators and polynomial approximation in C) Nagy B kiterjesztette J Bram egy nevezetes eredményét nemkorlátos normális operátorokra, aminek fontos következménye a multiplicitás két definiciójának azonossága, valamint a polinomok halmazának sűrűsége bizonyos L2 terekben.

Ismert volt, hogy ha ciklikus korlátos normális operátor szeparábilis Hilbert térben reduktiv, akkor rá vonatkozólag a ciklikus és a csillag-ciklikus vektorok fogalma azonos. Nagy B a Studia Mathematicaban megjelent cikkében (Subnormal operators, cyclic vectors and reductivity) általánosabban, ciklikus szubnormális operátorokra vizsgálta a hasonló kérdést, és bizonyitotta a fenti állitások ekvivalenciáját. A cikk a ciklikus normális operátorok reduktivitásának további érdekes jellemzését tartalmazza: tetszőleges olyan mértékre, amely ekvivalens az operátor ún. skalár-értékű spektrál mértékével, a polinomok halmaza sűrű a mértékre vonatkozó L2 térben.

Nagy B K-H. Försterrel közös dolgozatában (Equivalences of matrix polynomials) matrixpolinomok ekvivalenciáját vizsgálta ill. jellemezte az ekvivalenciának a kurrens irodalomban található különböző fogalmaira vonatkozólag. A polinomok általában szingulárisak. A vizsgált fő kérdések: a szigoru ekvivalencia és hasonlóság, valamint az, hogy polinomok ekvivalenciája implikálja-e az első kisérő linearizálások ekvivalenciáját (és a forditott irányu kérdés). Megjegyezzük, hogy ezen dolgozat egyes eredményei hasznosak lehetnek majd lineáris rendszerek szerkezetének vizsgálatában.

Nagy B On contractions in Hilbert space c.
dolgozata vizsgálta normális operátorhoz hasonló Hilbert térbeli operátor felbontását normális (önadjungált, unitér) rész és a nevezett tulajdonságtól teljesen mentes rész ortogonális összegére a spektrálfelbontás segítségével. Továbbá vizsgálta véges dimenziós Hilbert térben kontrakció operátor minimális unitér hatvány dilatációit (a k véges kitevőig). Meghatározta e dilatációk általános alakját, vizsgálta spektrumukat és izomorfiájuk kérdéseit. A vizsgálat első lépése itt a kontrakció felbontása unitér és teljesen nem-unitér részek ortogonális összegére. A cikk témájából Nagy B előadást tartott a Szőkefalvi-Nagy Béla nemzetközi emlékkonferencián 2013-ban Szegeden.

Riesz operators and Schur's lemma c. cikkében Nagy B elegendő feltételeket adott arra,
hogy Hilbert térbeli Riesz operátorhoz létezzék Jordan-Schur bázis az eredeti skalárszorzattal ekvivalens skalárszorzatra vonatkozólag. Ez a kérdés kapcsolatos Schur lemmájával kompakt operátorokról, amely lemma kiterjesztése Schur klasszikus tételének az unitér triangularizációról véges dimenziós térben. A véges dimenziós esetet is vizsgálja a cikk.

Orthonormal Jordan bases in finite dimensional Hilbert spaces c. dolgozatában Nagy B jellemezte a Jordan-Dunford felbontás segítségével azon lineáris operátorokat véges dimenziós komplex vagy valós Hilbert térben, amelyek számára létezik olyan ortonormált bázis, amelyben az operátor mátrixa Jordan mátrix. Továbbá szükséges feltételt adott erre az ön-kommutátor operátor felhasználásával.

Matolcsi Máté (és szerzőtársai) publikációi és eredményei:

1. P. Jaming, M. Matolcsi, P. Móra, F. Szöllősi, M. Weiner: A generalized Pauli problem and an infinite family of MUB-triplets in dimension 6, J. Physics A: Mathematical and Theoretical, Vol. 42, Number 24, 245305, (2009).

A kölcsönösen torzítatlan bázisok problémája 6 dimenzióban (röviden: MUB-6 probléma) régóta nyitott, híres probléma, amelynek motivációja a kvantum-információelméletből ered (lásd http://qig.itp.uni-hannover.de/qiproblems/Main_Page). Ismert, hogy a probléma ekvivalens 6x6-os complex Hadamard mátrixok egy bizonyos rendszerének létezésével. Ebben a cikkben egy diszkretizációs eljárást alkalmazva a problémának egy fontos speciális esetét oldottuk meg. Nevezetesen beláttuk, hogy a két-paraméteres F(a,b) Fourier család egyetlen mátrixa sem egészíthető ki (az identitással együtt) 4 torzítatlan bázissá. Explicit konstrukcióval azonban azt is beláttuk, hogy létezik az F(a,b) családból származó egy-paraméteres családja torzítatlan basis-hármasoknak. Mellékeredményként megmutattuk, hogy az F Fourier matrix egy kis környezetében az F(a,b) család minden tagjára igaz, hogy rá vonatkozóan pontosan 48 torzítatlan vektor létezik. A cikket beválasztották az “IOP Select” cikkek közé (http://www.iop.org/Select/abstract/ 1751-8121/42/24/245305), az innovatív megközelítésére és a további kutatásokra hatására tekintettel.

2. P. Jaming; M. Matolcsi; P. Móra: The problem of mutually unbiased bases in dimension 6, Cryptography and Communications, Vol. 2, Number 2, (2010) 211-220.

Ebben a publikációban egy általános tervet vázoltunk a MUB-6 probléma megoldására, ami a paraméter tér diszkretizációján alapszik. Ez lényegében az előző cikk megközelítésének egy általánosítása, amely az F(a,b) család után most már minden 6x6-os komplex Hadamard mátrixra kiterjed. A diszkretizációs eljárás során nem-triviális hibabecsléseket adtunk, amelyek lehetővé teszik, hogy a jövőben egy számítógépes esetvizsgálattal bebizonyítsuk, hogy 6 dimenzióban nem létezik MUB-oknak egy teljes rendszere. Az esetek száma sajnos a legjobb hibabecslések után is óriási marad, de elvileg megfelelő programozással kezelhető. Ennek a „csúnya” bizonyításnak az lenne a jelentősége, hogy mindeddig egyetlen d dimenzióban sem ismert az, hogy MUB-oknak egy teljes rendszere nem létezhet.

3. M. Matolcsi: A Fourier analytic approach to the problem of mutually unbiased bases, Studia Sci. Math. Hung., Vol. 49, No. 4 (2012), 482-491.

Ebben a publikációban elrugaszkodunk az előzőekben említett diszkretizációs eljárástól, és bemutatjuk, hogy hogyan lehet Delsarte-nak egy általános Fourier analitikus módszerét a MUB-problémára alkalmazni (nem csak 6 dimenzióban, hanem általánosan). Ez egy telejesen új megközelítés. Jól ismert, hogy bármely d dimenzióban legfeljebb d+1 egymásra kölcsönösen torzítatlan bázis létezhet. Ennek egy elegáns új bizonyítását, és egy általánosítását adja a Delsarte módszer minden d-re. Ezen kívül a Delsarte módszerrel az is vizsgálható, hogy N-dik egységgyökökből álló mátrixokból állhat-e egy teljes rendszer? Ezt megvizsgáltuk d=6 esetén N=6, 12, 16-ra, és beláttuk, hogy ilyen teljes rendszer nincs.

4. M. Matolcsi, I. Z. Ruzsa, M. Weiner: Systems of mutually unbiased Hadamard matrices containing real and complex matrices, Australasian J. Combinatorics, Volume **55** (2013), Pages 35–47.

Itt az előző publikáció észretvételét fejlesztük tovább: nevezetesen a Delsarte módszerhez hasonlóan egy hipotetikus teljes MUB-rendszernek valamint a benne szereplő Hadamard mátrixoknak megfelelő értelemben vett Fourier transzformáltját tekintjük, és az így kapott F és G függvényekre írunk fel lineáris azonosságokat. Ezek olyan megszorításokat adnak F-re és G-re, hogy minden d<6 dimenzióban a teljes MUB rendszerek teljes karakterizációját kapjuk (ez korábbról is ismert volt). d=6 esetén olyan lineáris programozási feladatokhoz jutunk, amelyeknek eredménye mindeddig inkonklúzív (a változók számának növelésével elvileg ellentmondáshoz juthatunk, ami azt jelentené, hogy teljes MUB rendszer nem létezik). A cikk további eredményeként belátjuk, hogy egy teljes MUB rendszer tetszőleges dimenzióban legfeljebb egy valós Hadamard mátrixot tartalmazhat, valamint megfogalmazunk egy strukturális sejtést 6x6-os Hadamard mátrixokra.

Szöllősi Ferenc (és szerzőtársai) publikációi és eredményei:

1. D. Z. Djokovic, S. Severini, F. Szöllősi: Rational orthogonal versus real orthogonal, The Electronic Journal of Linear Algebra, 18, 649—673, (2009).

Ebben a publikációban az ortogonális mátrixok „mintázatát” vizsgáljuk, azaz azt, hogy mely 0-1 mátrixokban lehet az 1-esek helyét tetszőleges nem 0 elemre módosítani úgy, hogy a kapott mátrix ortogonális legyen.

2. F. Szöllősi: Exotic complex Hadamard matrices, and their equivalence, Cryptography and communications, 2:2 187—198 (2010).

Ebben a publikációban blokkrendszerek segítségével mutatunk új példákat prímdimenziós komplex Hadamard mátrixokra. Bevezetünk egy új invariánst, amely segítségével kapcsolatot teremtünk unitér mátrixok különböző méretű minorjai között, majd ezen invariáns segítségével cáfoljuk K. Koukouvinos (és mtsai) egy 2002-ben felvetett problémáját.

3. F. Szöllősi: Complex Hadamard matrices of order 6: a four parameter family, J. London Math. Soc. (2) 85 (2012) 616–632.

Ebben a publickációban algebrai karakterizációt adunk komplex Hadamard mátrixokban található sorhármasok páronkénti merőlegességére, megjavítva ezzel U. Haagerup egy korábbi észrevételét. A karakterizáció segítségével egy új, négyparaméteres 6x6-os komplex Hadamard mátrixcsaládot konstruálunk, és azt sejtjük, hogy ez a konstrukció lényegében az összes (korábban még nem ismert) 6x6-os komplex Hadamard matrixot leírja.

4. F. Szöllősi: Complex Hadamard matrices and equiangular tight frames, Linear Algebra and its Applications, 438 (2013) 1962–1967.

Ebben a publikációban olyan egyeneseket konstruálunk komplex Hadamard mátrixok segítségével, amelyek páronként azonos szöget zárnak be, és megfordítva: új paraméteres komplex Hadamard mátrixokat konstruálunk négyzetdimenzióban. A dolgozatban fellelhető eredmények segítségével megválaszoljuk B. Bodmann (és mtsai) egy korábbi kérdését.

5. F. Szöllősi: A note on the existence of BH(19,6) matrices, Australasian J. Combin., Volume 55 (2013), Pages 31–34.

Ebben a rövid jegyzetben egy M. Petrescutól származó, nem közismert blokk konstrukció segítségével olyan új, prímdimenziós komplex Hadamard mátrixra adunk példát, amely elemeit komplex hatodik egységgyökök alkotják. A konstrukciók választ ad J. Seberry (és mtsai) egy kérdésére.

6. F. Szöllősi: On quaternary complex Hadamard matrices of small orders, Advances in Mathematics of Communications, 5:2 309—315 (2011)

Ebben a publikációban számítógép segítségével teljesen klasszifikáljuk a legfeljebb 8x8-as azon komplex Hadamard mátrixokat, amelyek elemei komplex negyedik egységgyökök, és megmutatjuk, hogy ezen mátrixok mindegyike tagja valamely végtelen, paraméteres mátrixcsaládnak.

7. P. Lampio, F. Szöllősi and P. Östergård: The quaternary complex Hadamard matrices of orders 10, 12 and 14, Discrete Mathematics 313 (2013) 189–206.

A 6-os számú publikáció folytatásaként szuperszámítógép segítségével klasszifikáljuk a legfeljebb 14x14-es komplex Hadamard mátrixokat, amelyek elemei komplex negyedik egységgyökök. Megmutatjuk, hogy 10 és 12 dimenzióban ezen mátrixok mindegyike tagja valamely végtelen, paraméteres családnak, azonban 14 dimenzióban találunk izolált példákat.

8. F. Szöllősi: Constructions, classifications and parametrization of complex Hadamard matrices, PhD thesis, Central European University, Budapest, 2012.

Ebben a disszertációban számos korábbi eredményünket tárgyaljuk, és részben általánosítjuk, valamint új eredményeket is prezentálunk. Többek között megjavítjuk a korábbi legjobb alsó becslést a valós páronként azonos szöget bezáró egységvektorok számáról d-dimenzióban; további ellenpéldákat adunk Fuglede azon sejtésére, amely szerint véges abel csoport egy spektrális halmaza parkettázó; valamint új prímdimenziós, ciklikus komplex Hadamard mátrixokat konstruálunk negyedik hatványmaradékok segítségével.

9. M. H. Lee, F. Szöllősi: Hadamard matrices modulo 5, J. Combin. Desings, 22:4, 171–178 (2014).

Ebben a publikációban általánosítjuk az O. Marrero által bevezetett moduláris blokkrendszereket, és ezen új koncepció segítségével teljesen eldöntjük az 5-moduláris Hadamard mátrixok létezésének kérdését. Explicit konstrukciók segítségével megmutatjuk, hogy pontosan akkor létezik egy ilyen mátrix, ha a mérete 10-zel osztva nem 3 vagy 7. Ez az első olyan irányú eredmény az irodalomban, amely prím modulusú mátrixokat vizsgál.

10. M. H. Lee, F. Szöllősi: A note on inverse-orthogonal Toeplitz matrices, The Electronic J. Linear Algebra, 26, 898—904 (2013).

Ebben a publikációban a komplex Hadamard mátrixok egy általánosítását, az ún. inverz-ortogonális mátrixokat vizsgáljuk. Megmutatjuk hogy ha egy inverz-ortogonális mátrix Toeplitz struktúrával rendelkezik, akkor az természetes módon megfeleltethető egy olyan inverz-ortogonális mátrixnak, amely a jóval erősebb ciklikus struktúrával bír. A cikk rámutat arra, hogy a Toeplitz vagy ciklikus struktúra megléte Hadamard mátrixok esetén lényegében azonos feltételeket jelent.

11. G. Greaves, A. Munemasa, J. H. Koolen, F. Szöllősi: Equiangular lines in Euclidean spaces, kézirat közlésre benyújtva (2014).

Ebben a kéziratban, amely jelenleg elbírálás alatt áll, azon Seidel mátrixokat vizsgáljuk, amelyeknek pontosan három különböző sajátértéke van. Tovább javítjuk a 7. disszertációban elért alsó korlátot a páronként azonos szöget bezáró valós egységvektorok számáról. Számítógép segítségével klasszifikáljuk az összes 12x12-es Seidel mátrixot, valamint megmutajuk, hogy 14 és 16 dimenziókban nem lehetséges a korábban remélt 30 illetve 42 darab páronként azonos szöget bezáró egységvektort konstruálni.

12. F. Szöllősi: All complex equiangular tight frames in dimension 3, kézirat közlésre benyújtva (2014).

Ebben a kéziratban, amely jelenleg elbírálás alatt áll, Gröbner bázisok segítségével leírjuk a páronként azonos szöget bezáró komplex egységvektoroknak egy az alkalmazásokban is előforduló családját 3 dimenzióban. Megmutatjuk, hogy nem létezik 8 vektorból álló ilyen speciális konfiguráció. Bizonyításunk az első ilyen irányú nemlétezési eredmény a témakörben.

Poszterprezentáció:

13. F. Szöllősi: Understanding complex Hadamard matrices and mutually unbiased bases of order 6.

Egy posztert prezentáltunk a ``14th workshop on quantum information processing'' konferencián, 2011 január 10-14 között Szingapúrban. A prezentáció a 3. dolgozat eredményeit illusztrálta.