

Szakmai zárójelentés a 77400 azonosító számú
„Integrálható sokrészecske és térelméleti modellek”
című kutatásról

Három nagyobb témakör vizsgálatát terveztük, ezért az eredményeket is a három téma szerint rendezve foglaljuk össze. Munkáink jelentős része kapcsolatos a Ruijsenaars és Schneider (RS) által 1986-ben felfedezett és azóta folyamatosan vizsgált sokrészecske rendszerekkel. Ezek a transláció-invariáns rendszerek az 1970 körül bevezetett Calogero-Moser-Sutherland modellek relativisztikus általánosításainak tekinthetők. A relativisztikus modellek és határeseik érdekes Lie elméleti általánosításokkal is rendelkeznek, amelyek közül legfontosabbak a $BC(n)$ típusú gyökrendszerhez asszociált, félegyenesen mozgó részecskéket leíró modellek. Az alábbi I. pontban a translációs szimmetriával rendelkező sokrészecske rendszereket érintő eredményeinket gyűjtjük össze, a II. pontban pedig a $BC(n)$ gyökrendszerhez kapcsolódó modellek vizsgálatait összegezzük. A III. pontban ismertetett eredmények többsége a térelméleti AdS/CFT megfeleltetésről szól. Szögletes zárójelben a jelentés végén listázott, a pályázat támogatásával született 28 publikációnkra hivatkozunk; összes publikációnk szabadon elérhető az arXiv-ban is.

I. Ruijsenaars-Schneider típusú modellek és általánosításaik [F2-F3, F5-F12, B1-B2]:

Minden integrálható sokrészecske rendszer klasszikus fázistere hordozza a Poisson zárójelben kommutáló mennyiségek két családját: az egyiket a részecske koordináták, a másikat a hatás változók generálják. Két rendszert egymás duálisának nevezünk, ha fázistereik között létezik egy olyan kanonikus transzformáció, amely az egyik rendszer részecske koordinátáit a másik rendszer hatás változóiba alakítja, és fordítva. Ruijsenaars munkáiból a 90-es évek közepe óta ismert, hogy az integrálható sokrészecske modellek sok esetben duális párokba (öndualitást is beleértve) rendezhetők. Ez igen hasznos a modellek részletes analíziséhez. Kutatásunk egyik fő célja a modellek és dualitásaik geometriai, hamiltoni redukciós értelmezése volt. A témában a következő eredményeket értük el.

Fehér László és munkatársa megtalálták a komplex trigonometrikus RS modell két különböző valós formája közötti dualitás geometriai értelmezését [F5]. A dualitási relációt a klasszikus hamiltoni redukciós módszer Poisson-Lie általánosítását használva vezették le. Módszerük lényege az, hogy a dualításban álló rendszereket egy olyan magas dimenziós fázistert redukálva kapják, amely „szabad” Hamilton függvények két kommutatív Poisson algebráját hordozza. Redukció után a szabad Hamilton függvények adják a duális rendszerek hatás változóit és részecske koordinátáit. Szerepük felcserélése mögött a redukált fázistér két ekvivalens leírása áll, melyek megfelelnek a duális rendszereknek. Így magától értetődővé vált, hogy a dualitást egy kanonikus transzformáció reprezentálja. A konkrét esetben a redukálatlan fázistér az $U(n)$ Poisson-Lie csoport Heisenberg duplája volt.

Az említett eredmény fontos lépést jelent a többi ismert dualitási reláció rejtett szimmetrián alapuló, redukciós értelmezése felé. Nevezetesen, az [F3] cikkben hasonló geometria keretbe sikerült helyezni a komplex racionális RS modell egy nem-standard valós formája és a trigonometrikus Sutherland modell dualitási relációját. Ezen munka további eredménye a különböző fizikai interpretációkhoz tartozó Sutherland modellek (egyenesen mozgó

megkülönböztethető, illetve körön mozgó megkülönböztethető vagy megkülönböztethetetlen részecskék) összekapcsolása az $U(n)$ csoport fedőcsoportjaival. A különböző Sutherland modellek és duálisaik az $U(n)$ és fedőcsoportjai koérintő nyalábjainak redukciójával adódtak.

Az [F7] publikációkban kidolgoztuk a kompaktifikált trigonometrikus RS modell kvázi-hamiltoni redukción alapuló új tárgyalását, amely ezt az integrálható sokrészecske rendszert összeköti a kilyukasztott tóruszon értelmezett lapos $SU(n)$ Yang-Mills mezők modulus terével. Nevezetesen, a rendszer kompaktifikált fázisterét azonosítottuk a lapos $SU(n)$ konnexiók mérték ekvivalencia osztályaival, a kommutáló részecske koordinátákat és hatás változókat pedig a tórusz nem-triviális ciklusai mentén vett monodrómia ("Wilson hurkok") sajátértékeit kódoló alkalmas invariánsokkal. Ezzel bizonyítottuk Gorsky és Nekrasov egy 1995-ben megfogalmazott sejtését, valamint visszavezettük a Ruijsenaars-féle öndualitási kanonikus transzformációt a tórusz $SL(2, \mathbb{Z})$ leképezésoosztály csoportja standard S elemének geometriai eredetű, természetes hatására [F7, F10]. A nyert interpretációt felhasználva a kvantummechanikai modell kommutáló Hamilton operátorainak spektruma is a korábban ismertnél jóval egyszerűbben adódott [F8].

Az [F7]-ben tekintett kvázi-hamiltoni redukció általánosítása révén az [F11] cikkben a kompaktifikált RS modell új változatait vezettük le. Redukciós levezetésünkénél fogva mindezen modellek a kilyukasztott tóruszon különböző határfeltételekkel definiált $SU(n)$ Chern-Simons térelméletekkel azonosíthatóak. Új modelljeink részletes analízise és az eredmények térelméleti interpretációja további kutatás témája lehet.

Az RS modellek háttérében meghúzódó hamiltoni redukciós képpel analóg interpretáció érvényességét igazoltuk a nyílt Toda lánc („Toda molekula”) és duálisa esetében is [F12]. Ilyen kép létezése valószínű volt, mivel a Toda modellek RS modellek határesetei.

A tisztán szórási megoldásokkal bíró sokrészecske modellek egy további érdekes tulajdonságát jelenti a modellek szuperintegrálhatósága, ami $2n$ dimenziós fázistér esetén $(2n-1)$ explicit időfüggés nélküli, globálisan sima mozgásállandó létezését követeli meg. Az [F2] cikkben a mozgásállandókat expliciten megkonstruálva igazoltuk a standard racionális RS modell szuperintegrálhatóságát. Az [F9] cikkben megmutattuk, hogy a szórási jellegű modellpárok közötti dualitás hogyan vonja maga után általában is a szuperintegrálhatóságot. Ebből következik pl. a hiperbolikus Sutherland modell szuperintegrálhatósága mind a standard $A(n)$ mind a [P4]-ben tekintett $BC(n)$ esetben.

Az [F6] cikkben elemi módszerrel meghatároztuk az elliptikus Cauchy mátrix Gauss felbontását és ebből levezettük a Cauchy mátrix determinánsára vonatkozó klasszikus Frobenius azonosságot. Ez a cikk Prof. S. Ruijsenaars 2011-ben a pályázat támogatásával megvalósult 1 hetes budapesti látogatásának köszönhető. Mivel a tekintett Cauchy mátrix az elliptikus RS modellek Lax mátrixának alapvető építőköve, az eredmény hasznos lehet pl. az [F11]-ben konstruált modellek elliptikus analógjainak jövőben tervezett konstrukciójához.

Érdekes alkalmazását találtuk a kétdimenziós integrálható modellekben, elsősorban a hiperbolikus RS modellben, ami tudvalevőleg a Sine-Gordon térelmélettel ekvivalens, ill. az Ising modellben történt korábbi vizsgálatainknak. Ezen modellek kvantum változataiban vizsgáltuk a részecskék Nambu-Bethe-Salpeter (NBS) hullámfüggvényeit és a belőlük származtatható potenciálokat, ill. ezeknek a rövid távolságú viselkedését. Kiderült, hogy hasonló módon tanulmányozható [B1, B2] a $3 + 1$ dimenziós QCD-ben is a hadron részecskék NBS hullámfüggvénye és potenciálja. A rövid távú viselkedést vizsgálva azt találtuk, hogy ebben a tartományban a hadronok közötti kölcsönhatás tasztító: erre a fenomenológiából jól ismert tulajdonságára a hadronok közötti magerőnek korábban nem létezett első elvekből (QCD) kiinduló levezetés.

II. BC(n) típusú Sutherland modellek és általánosításaik [FP1,P2-P6,F4,F13]:

Az [FP1] cikkben a BC(n) típusú trigonometrikus Sutherland modell Hamilton operátorát alkalmas $U(N)$ Lie csoport Laplace operátorának specializációjaként állítottuk elő, a kvantum hamiltoni redukció módszerének alkalmazásával. Előállításunk a Hamilton operátorban szereplő három csatolási állandó tetszőleges egész értékeire érvényes, és ezen esetekben elvileg lehetővé teszi a spektrum és a sajátfüggvények tisztán csoportelméleti meghatározását; a sajátfüggvények általánosított gömbfüggvényekként adódnak.

Az RS modellek BC(n) típusú gyökrendszerekre történő általánosítását van Diejen vezette be még 1994-ben. Így meglepő lehet az a tény, hogy a van Diejen által alkotott modellek geometriai konstrukciókon alapuló analízise a mai napig nagyrészt nyitott probléma. A probléma forrása abban keresendő, hogy az integrálható rendszerekre jellemző Lax párok a generikus Ruijsenaars-Schneider-van Diejen (RSvD) modellek esetén továbbra sem ismertek. Projektünkben ezen a két évtizede fennálló nyitott kérdésen sikerült számottevő haladást elérnünk azáltal, hogy először Lax mátrixot konstruáltunk a két független csatolási állandót tartalmazó racionális $C(n)$ RSvD modellhez ([P2], [P3]), majd megfontolásainkat sikeresen általánosítottuk a három független csatolási állandót tartalmazó racionális BC(n) RSvD modellre is [P4]. A Lax mátrix birtokában hatás-szög változókat konstruáltunk a racionális BC(n) RSvD és a hiperbolikus BC(n) Sutherland modellekhez egyaránt. Sőt, a szimplektikus redukción alapuló módszerünk azonnali következményeként bebizonyítottuk, hogy ezen modellek között hatás-szög dualitási kapcsolat áll fenn. Eredményeink a nem A típusú gyökrendszerekhez társított RSvD modellek geometriai tanulmányozásánál az első nem-triviális lépéseknek tekinthetők. Jogosnak tűnik az a feltételezés, hogy munkánk alapul szolgálhat a nem A típusú gyökrendszerekhez társított RSvD modellek hiperbolikus, trigonometrikus és elliptikus variánsainak geometriai vizsgálatához is, elsősorban az ezen esetekben még mindig hiányzó Lax mátrixok konstruálásánál.

A tapasztalat azt mutatja, hogy az egzakt megoldhatóság egyik lehetséges magyarázata a háttérben meghúzódó szimmetriákban és a kapcsolatos algebrai struktúrákban keresendő. Ennek prominens példája a Yang-Baxter egyenletek és az r -mátrixok különböző variánsain alapuló algebrai struktúrák fundamentális szerepe az integrálható rendszerek elméletében. Redukción alapuló geometriai módszerünk érdekes új eredményekre vezetett ezen a kutatási területen is. Természetes módon általánosítva Avan, Babelon és Talon 1994-es eredményeit, dinamikai r -mátrixot konstruáltunk a három független csatolási állandót tartalmazó hiperbolikus BC(n) Sutherland modellhez [P5]. Ezen munkánk folytatása a jövőben elvezethet az elliptikus BC(n) modellek dinamikai r -mátrixának konstruálásához is.

Szimplektikus redukción alapuló megközelítésünket felhasználtuk a BC(n) Sutherland és az RSvD rendszerek szóráselméletének tanulmányozására is. A redukció által szolgáltatott természetes megoldási algoritmus analízisével pontos aszimptotikákat nyertünk a racionális BC(n) RSvD és a hiperbolikus BC(n) Sutherland modellek időfejlődésére vonatkozólag [P6]. Figyelemre méltó, hogy a Moller szórási transzformációk szimplektikus volta a modellekre bebizonyított duális kapcsolat [P4] triviális következményeként adódott. Ugyancsak beláttuk, hogy a szórási leképezés faktorizált alakot ölt, azaz a sokrészcseke szórási folyamat

egyértelműen rekonstruálható a 2-részecske szórásokból és az 1-részecske szórásokból a külső potenciálon. Ismeretes, hogy ez a szórási kép pontosan a szoliton rendszerek sajátja. A $BC(n)$ gyökrendszerhez társított RSvD sokrészecske rendszerek és az integrálható határfeltételekkel bíró, félegyenesen értelmezett integrálható térelméleti modellek között megsejtett ígéretes kapcsolat matematikailag szigorú analízise további kutatásokat igényel.

Az [F4] cikkben levezettük a hiperbolikus $BC(n)$ Sutherland modell töltött részecskék kölcsönhatásának megfelelő általánosítását. A modellt az $SU(n,n)$ Lie csoporton geodetikus mozgást leíró szabad rendszer hamiltoni szimmetria redukciójával kaptuk. A levezetés technikai érdekessége egy nem-kompakt szimmetria csoport használata. Módszerünk három független csatolási állandó esetén bizonyítja a modell integrálhatóságát, és a megoldások megkeresését alkalmas mátrixok diagonalizálására vezeti vissza. A tekintett redukció további általánosításával Sutherland modellek spin szabadsági fokokat is tartalmazó új kiterjesztéseit nyertük [F13].

III. AdS/CFT megfeleltetés és az integrálhatóság algebrai aspektusai [BH1-BH6]:

Az AdS/CFT megfeleltetéssel kapcsolatos munkáinkban, korábbi, kétdimenziós integrálható modellekben szerzett tapasztalatainkat az itt fellépő húrelméleti szigma modellek véges méret effektusainak vizsgálatára terveztük alkalmazni. Ezt maradéktalanul megvalósítottuk, eredményeinket a [BH1-BH5] folyóiratcikkekben közöltük. Eredeti várakozásunknak megfelelően ez a terület rohamosan fejlődött az elmúlt években és később módszerünket (nemzetközi kooperációban) egy olyan területen (a kvark-antikvark potenciál) is alkalmazni tudtuk [BH6], amely területen az első AdS/CFT módszert használó publikációk csak 2012-ben születtek meg.

A véges méret effektusokkal kapcsolatos eredményeinket három, logikailag egymásra épülő lépésben értük el. Első lépésként a véges méretű rendszer állapotait végtelen sok komponensből álló TBA integrálegyenlet-rendszerrel írtuk le. Itt először az Arutyunov-Frolov csoport módszerét, a deformált kontúrok módszerét használtuk gerjesztett állapotok leírására. Ezután megmutattuk, hogy ugyanezeket az egyenleteket úgy is meg lehet kapni, ha az univerzális Y-rendszer funkcionálegyenleteket megfelelő vágási relációkkal egészítjük ki. Végül az így kapott rendszert véges sok komponensből álló NLIE-típusú integrálegyenletekre egyszerűsítettük.

A [BH1-BH2] publikációkban megmutattuk, hogy a húrmodell (speciális) sl_2 -típusú állapotaira felírt TBA egyenletek gyenge csatolás mellett sorbafejthetők és 5-hurok rendig elmenve a számolásokban, a korábban más módszerrel (Lüscher-sorfejtés) kapott eredmények reprodukálhatóak. Ennek akkor nagy jelentősége volt: eredményeink a TBA integrálegyenletek, ill. magának az AdS/CFT sejtésnek a helyességét erősítették meg. A legegyszerűbb állapot (Konishi) esetében ugyan numerikusan már korábban is igazolták az egyenletek helyességét, de a mi eredményünk analitikusan mutatta meg ugyanezt a teljes sl_2 szektorban. A [BH1] publikáció a SPIRES adatbázis szerint TOPCITE kategóriába került: több, mint 50 független hivatkozást kaptunk rá.

A fenti cikkekben sl_2 állapotokra még a kontúr-deformáció módszerét alkalmaztuk az egyenletek felállítására, de általános állapotok esetére ez az ad hoc módszer nem alkalmazható. Helyette kidolgoztunk [BH3] egy minden állapotra érvényes szisztematikus módszert a TBA egyenletek felírására: kiindulópontként a Y-rendszer egyenletei és a

függvények vágásai mentén érvényes diszkontinuitási relációk szolgálnak. Ezek univerzálisak, a rendszer különböző állapotait a pontszerű szingularitások száma és azok elhelyezkedése alapján különböztethetjük meg.

Később sikerült [BH4-BH5] a mind analitikusan, mind numerikusan nehezen kezelhető végtelen komponensű TBA integrálegyenletrendszer egy ekvivalens, de már csak véges sok ismeretlen függvényt tartalmazó egyenletrendszerrel helyettesíteni. Ezeket az egyenleteket hibrid-NLIE egyenleteknek neveztük el. Az első cikkben [BH4] a TBA egyenleteket olyan kvázi-lokális alakra hoztuk, amelyben minden egyes TBA egyenlet a TBA diagrammon csak első-, illetve másodszeres változókat kapcsol össze. A TBA egyenletek ezen kvázi-lokális alakját használva kidolgoztuk [BH5] a véges hibrid-NLIE leírást, döntően a már a relativisztikus esetekre korábban kidolgozott technikák segítségével: a végtelen TBA diagramm vízszintes, ill. függőleges részeit véges sok komponensből álló SU(2), ill. SU(4) típusú NLIE integrálegyenletekkel helyettesítve. Az új, véges sok változójú hibrid-NLIE egyenletek helyességét az ún. csavart alapállapot vizsgálatával demonstráltuk: megmutattuk, hogy az első és második Lüscher-közelítésben is a helyes eredményeket szolgáltatja.

Az AdS/CFT megfeleltetés vizsgálatában a spektrumon felül fontos az elmélet anyagmezőit alkotó kvantumok kölcsönhatását leíró potenciál kiszámítása is. [BH6] közleményünkben a szuper-Yang-Mills elméletbeli kvarkok és antikvarkok kölcsönhatását vizsgáltuk. A kvark-antikvark potenciál egy „hegyes” két szöggel jellemezhető (θ, φ) Wilson-hurok vákuum várható értékén keresztül határozható meg, ugyanis ez a mennyiség a megfeleltetés húrelméleti oldalán egy véges térfogatú 1-dimenziós peremes integrálható modell alapállapot energiájának kiszámításával adható meg. A peremes véges méret effektusok a peremes TBA technikával számolhatók, úgy hogy a két szög (θ, φ) a TBA egyenletekben megjelenő kémiai potenciálok értékét határozzák meg. A hegyes Wilson-hurok vákuum várható értékének megfelelő kémiai potenciálok tisztán imagináriusak. Ekkor az egyenletek szingulárisá válnak, ami abban nyilvánul meg, hogy az egyenleteket nem lehet a 't Hooft csatolás kis értékeire perturbatíván kifejtteni. Ezért [BH6]-ban egy új megközelítést alkalmaztunk. Valós kémiai potenciálok mellett írtuk fel az egyenleteket, ahol a szisztematikus perturbatív kifejtés elvégezhető volt, majd az így kapott perturbatív kifejezés analitikus elfolytatásával tértünk vissza az imaginárius kémiai potenciálok esetéhez. Ezzel a módszerrel két-hurok rendig számoltuk ki a kvark-antikvark potenciál (hegyes Wilson hurok várható) értékét és tökéletes egyezést kaptunk a direkt két-hurok kvantumtérelméleti számítások eredményeivel. Ezzel a kvark-antikvark potenciál integrálhatóságon keresztül történő egzakt leírásának helyességét támasztottuk alá.

IV. Fiatal kutatók képzésében realizált eredmények:

Munkatervünkben említettük egyetemi speciális előadások tartását és azon alapulva diákok bevonását a kutatásba, valamint egy PhD értekezés várható elkészültét. Tervünk ezen pontjai is megvalósultak. Ayadi Viktor 2013 decemberében PhD fokozatot nyert az SZTE Fizika Doktori Iskolájában készült „Integrálható sokrészecske rendszerek vizsgálata hamiltoni szimmetria-redukciós módszerrel” című értekezése alapján (amely Fehér László irányításával az [F2,F3,F4,F9] publikációk alapján készült). Az [F9] publikációban társszerző Görbe Tamás Ferenc személyében egy újabb hallgatót is bevontunk, aki 2013 szeptemberétől rokon témában PhD hallgató Szegeden FL témavezetésével.

Publikációk

- [FP1] L. Fehér and B.G. Puztai, Derivations of the trigonometric BC(n) Sutherland model by quantum Hamiltonian reduction, *Rev. Math. Phys.* 22, 699-732 (2010).
- [F2] V. Ayadi and L. Feher, On the superintegrability of the rational Ruijsenaars-Schneider model, *Phys. Lett. A* 374, 1913–1916 (2010).
- [F3] L. Fehér and V. Ayadi, Trigonometric Sutherland systems and their Ruijsenaars duals from symplectic reduction, *Journ. Math.Phys.* 51, 103511 (2010).
- [F4] V. Ayadi and L. Fehér, An integrable BC(n) Sutherland model with two types of particles, *Journ. Math.Phys.* 52, 103506 (2011).
- [F5] L. Fehér and C. Klimcik, Poisson-Lie interpretation of trigonometric Ruijsenaars duality, *Commun. Math.Phys.* 301, 55–104 (2011).
- [F6] L. Fehér, C. Klimcik and S. Ruijsenaars, A note on the Gauss decomposition of the elliptic Cauchy matrix, *J. Nonlin. Math.Phys.* 18, 179-182 (2011).
- [F7] L. Fehér and C. Klimcik, Self-duality of the compactified Ruijsenaars-Schneider system from quasi-Hamiltonian reduction, *Nucl. Phys. B* 860, 464-515 (2012).
- [F8] L. Fehér and C. Klimcik, On the spectra of the quantized action variables of the compactified Ruijsenaars-Schneider system, *Theor. Math.Phys* 171, 705-715 (2012).
- [F9] V. Ayadi, L. Fehér and T.F. Görbe, Superintegrability of rational Ruijsenaars-Schneider systems and their action-angle duals, *J. Geom. Symmetry Phys.* 27, 27-44 (2012).
- [F10] L.Fehér and C. Klimcik, The Ruijsenaars self-duality map as a mapping class symplectomorphism, In: Dobrev V (szerk.), IX. International Workshop:Lie Theory and Its Applications in Physics, pp. 423-437, 2013 (Springer Proceedings in Mathematics and Statistics; 36).
- [F11] L. Fehér and T.J. Kluck, New compact forms of the trigonometric Ruijsenaars-Schneider system, preprint arXiv:1312.0400, submitted to *Nucl. Phys. B*.
- [F12] L. Fehér, Action-angle map and duality for the open Toda lattice in the perspective of Hamiltonian reduction, *Phys. Lett. A* 377, 2917-2921 (2013).
- [F13] L. Fehér, An Application of the Reduction Method to Sutherland type Many-body Systems, In: Kielanowski P, Ali ST, Odesskii A, Odziejewicz A, Schlichenmaier M, Voronov T (szerk.), *Geometric Methods in Physics*, pp. 109-117, 2013 (Trends in Mathematics; 57).
- [B1] S. Aoki, J. Balog and P. Weisz, The repulsive core of the NN potential and the operator product expansion, *Proceedings of Science LAT2009*:132 (2009).
- [B2] S. Aoki, J. Balog and P. Weisz, Operator product expansion and the short distance behavior of 3-flavor baryon potentials, *JHEP* 1009:083 (2010).
- [B3] J. Balog, F. Niedermayer, M. Pepe, P. Weisz and U.-J. Wiese, Drastic Reduction of Cutoff Effects in 2-d Lattice O(N) Models, *JHEP* 1211:140 (2012).
- [B4] J. Balog, F. Niedermayer and P. Weisz, Symanzik effective actions in the large N limit, *JHEP* 1308:027 (2013).

- [P2] B. G. Puztai, On the scattering theory of the classical hyperbolic $C(n)$ Sutherland model, J. Phys. A – Math.andTheor. 44:155306 (2011).
- [P3] B. G. Puztai, Action-angle duality between the $C(n)$ -type hyperbolic Sutherland and the rational Ruijsenaars-Schneider-van Diejen models, Nucl. Phys. B853, 139-173 (2011).
- [P4] B.G. Puztai, The hyperbolic $BC(n)$ Sutherland and the rational $BC(n)$ Ruijsenaars-Schneider-van Diejen models: Lax matrices and duality, Nucl. Phys. B856, 528-551 (2012).
- [P5] B.G. Puztai, On the r-matrix structure of the hyperbolic $BC(n)$ Sutherland model, Journ. Math. Phys. 53, 12 (2012).
- [P6] B.G. Puztai, Scattering theory of the hyperbolic $BC(n)$ Sutherland and the rational $BC(n)$ Ruijsenaars-Schneider-van Diejen models, Nucl. Phys. B 874, 647-662 (2013).
- [BH1] J. Balog and A. Hegedus, 5-loop Konishi from linearized TBA and the XXX magnet, JHEP 1006:080 (2010).
- [BH2] J. Balog and A. Hegedus, The Bajnok-Janik formula and wrapping corrections, JHEP 1009:107 (2010).
- [BH3] J. Balog, A. Hegedus, $AdS_5 \times S^5$ mirror TBA equations from Y-system and discontinuity relations, JHEP 1108: 095 (2011).
- [BH4] J. Balog and A. Hegedus, Quasi-local formulation of the mirror TBA, JHEP 1205:039 (2012).
- [BH5] J. Balog and A. Hegedus, Hybrid-NLIE for the AdS/CFT spectral problem JHEP, 1208:022 (2012)
- [BH6] Z.Bajnok, J. Balog, D.H. Correa, A. Hegedus, F.I. Schaposnik Massolo and G.Zs.Toth, Reformulating the TBA equations for the quark anti-quark potential and their two loop expansion, preprint arXiv:1312.4258, submitted to JHEP.