OTKA PD75264 beszámoló (Tengely Szabolcs)

A beszámoló első részében bemutatjuk a posztdoktori pályázat ideje alatt megjelent, illetve elkészült tudományos eredményeket.

(1) Abu Muriefah F. S., Luca F., Siksek S., Tengely Sz.: On the Diophantine Equation $x^2+C=2y^n$, International Journal of Number Theory 5:(6) pp. 1117-1128. (2009). 2007. március 19-től március 30-ig a Warwicki Egyetemen dolgoztam együtt Samir Siksekkel. Az

$$x^2 + C = 2y^p$$

diofantikus egyenletet vizsgáltuk relatív prím (x, y) esetben felhasználva az úgynevezett multi-Frey módszert. Eredményeinkről 2007 májusában meghívott előadóként tartottam előadást Leidenben a Solvability of Diophantine Equations workshopon. Később a kutatáshoz csatlakozott Fadwa S. Abu Muriefah és Florian Luca. Megoldási módszert adtunk a

$$x^2 + q_1^{a_1} \dots q_k^{a_k} = 2y^p$$

típusú diofantikus egyenletek összes megoldásának meghatározására felhasználva Bilu, Hanrot és Voutier egy eredményét. Illusztrációként megoldottuk a következő egyenleteket:

$$x^2 + 5^{a_1}13^{a_2} = 2y^n,$$
$$x^2 + 3^{a_1}11^{a_2} = 2y^n.$$

A kutatás csak olyan eredményeket tartalmaz, amelyek a Magyary Zoltán Posztdoktori Ösztöndíjhoz kötődnek, minden eredmény a cikkben 2009 előtt született, ezért nem lett feltüntetve az OTKA támogatás.
(http://www.math.unideb.hu/∼tengely/tsz/uploads/Main/LMST_1218.pdf)

(2) Hajdu L., Tijdeman R., Tengely Sz.: Cubes in products of terms in arithmetic progression, Publ. Math. Debrecen 74:(1-2) pp. 215-232. (2009) Hajdu Lajossal és Rob Tijdemannal közösen vizsgáltuk az

$$n(n + d)(n + 2d) \cdots (n + (k - 1)d) = by^3$$

diofantikus egyenletet. Megmutattuk, hogy ha (n, d, k, b, y) megoldása az egyenletnek, $k \leq 31$ és $P(b) < k$, ahol $P(b)$ jelöli b legnagyobb prímosztóját, akkor (n, d, k) a következő lista elemei közül kerül ki:

$$(n, 1, k) \text{ ahol } -36 \leq n \leq -4 \text{ vagy } 1 \leq n \leq 6,$$
$$(n, 2, k) \text{ ahol } -29 \leq n \leq -3,$$
$$(-10, 3, 7), (-8, 3, 7), (-8, 3, 5), (-4, 3, 5), (-4, 3, 3), (-2, 3, 3),$$
$$(-9, 5, 4), (-6, 5, 4), (-16, 7, 5), (-12, 7, 5).$$

A cikkben különféle kombinatorikus szűrési feltételeket használunk, elliptikus Chabauty-módszert az eredmények igazolásához. A kutatás az OTKA T48791 támogatásával készült, ami a cikkben fel is van tüntetve.
(http://www.math.unideb.hu/∼tengely/tsz/uploads/Main/lhsztrt.pdf)

(3) Tengely Sz.: Finding g-gonal numbers in recurrence sequences, Fibonacci Quarterly 46/47:(3) pp. 235-240. (2009). A g-gonális számok bizonyos kombinatorikus problémákban fordulnak elő, az általános definíciójuk a következő:

$$\mathcal{G}_{m,g} = \frac{m\{(g-2)m - (g-4)\}}{2}.$$

Az irodalomban sokan foglalkoztak az ilyen típusú számok meghatározásával rekurzív sorozatokban. Ebben a témakörben $g = 3, 4, 5, 7$ esetekben születtek eredmények korábban. A cikkben ezek lettek kiterjesztve a $g = 6, 8, 9, \ldots, 20$ értékekre. A Fibonacci, Lucas, Pell és az asszociált Pell sorozatokban az összes g-gonális szám meg lett határozva a fenti g értékek esetében. Az eredmények bizonyításában fontos szerepet játszanak az elliptikus görbék és a Thue-egyenletek.
(`http://www.math.unideb.hu/~tengely/G-gonal-FQ.pdf`)

(4) Hajdu L., Tengely Sz.: Arithmetic progressions of squares, cubes and n-th powers, Functiones et Approximatio Commentarii Mathematici 41:(2) pp. 129-138. (2009). Hajdu Lajossal közösen vizsgáltunk olyan számtani sorozatokat, amelyek négyzetszámokból vagy köbszámokból és n-edik hatványokból állnak. A probléma természetes általánosítása Fermat egyik kérdésének, amelyet Euler oldott meg, miszerint négy különböző négyzetszám nem alkothat számtani sorozatot. Mi megmutattuk, hogy négyzetszámokból vagy köbszámokból és n-edik hatványokból sem lehetséges öt tagú nem triviális sorozatnál hosszabbat előállítani. A bizonyítás során több moduláris eredményt és az elliptikus Chabauty-módszert is alkalmaztuk ötödfokú algebrai számtestek felett. Például megmutattuk, hogy ha $\alpha = \sqrt[5]{2}$ és $K = \mathbb{Q}(\alpha)$, akkor a

$$C: \quad \alpha^4X^4 + \alpha^3X^3 + \alpha^2X^2 + \alpha X + 1 = (\alpha - 1)Y^2$$

görbén az olyan pontok, amelyekre $X \in \mathbb{Q}$, $Y \in K$ teljesül, hogy

$$(X, Y) = (1, \pm(\alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1)), \ \left(-\frac{1}{3}, \pm\frac{3\alpha^4 + 5\alpha^3 - \alpha^2 + 3\alpha + 5}{9}\right).$$

Erre a publikációra már 5 független hivatkozás történt, amelyek közül az egyik: Siksek S., Stoll M.: On a problem of Hajdu and Tengely, Algorithmic Number Theory, Proceedings of the 9th International Symposium, LNCS 6197, Springer-Verlag, 316-330. (2010).
(`http://www.math.unideb.hu/~tengely/HajduTengely.pdf`)

(5) Luca F., Tengely Sz., Togbé A.: On the Diophantine Equation $x^2 + C = 4y^n$, Annales des Sciences Mathématiques du Québec 33:(2) pp. 171-184. (2009). A címben szereplő exponenciális diofantikus egyenlet összes megoldását meghatároztuk, amikor $1 \leq C \leq 100$ közötti egész és hárommal kongruens moduló 4. Továbbá megoldottuk azon eseteket is, amelyeknél $C = 7^a11^b$ vagy 7^a13^b. Az eredeti egyenleteket Thue egyenletekre és elliptikus görbékre vezettük vissza, itt a nehézséget az okozza, hogy magasabb fokú számtestekben kell dolgozni, ahol az ideálosztályszám nem 1.
(`http://www.math.unideb.hu/~tengely/LTT.pdf`)

(6) Tengely Sz.: Algebrai görbék a diofantikus számelméletben, Habilitációs disszertáció, Debreceni Egyetem, 2010. (215 oldal). Három magyar nyelvű fejezetben és három angol nyelvű fejezetben szerepelnek OTKA támogatással végzett kutatások. Exponenciális diofantikus egyenletek vizsgálata, számtani sorozatok elemeinek szorzatával kapcsolatos diofantikus problémák és számtani sorozatot alkotó teljes hatványok témakörökben. A disszertációhoz tartozik még egy 64 oldalas téziseket ismertető publikáció is. A habilitációs disszertációmat 2010. április 15-én sikeresen megvédtem.
(`http://www.math.unideb.hu/~tengely/HabilitacioTSz.pdf`)

(7) Magma kód implementálása az $y^2 = x^6+tx^4+tx^2+1$ alakú génusz kettes görbék összes racionális pontjának meghatározására, ahol t egy racionális paraméter. A kód Kulesz, Matera és Schost "Uniform bounds for the number of rational points of families of curves of genus 2", Journal of Number Theory 108(2): 241-267 publikációját követve készült. A kód segítségével meghatározható az említett cikkben szereplő tétel kimaradó eseteinek a megoldásai, néhány komplikált értéket leszámítva. Az implementáció letölthető a `http://www.math.klte.hu/~tengely/DemjanenkoManin.m` címről.

(8) Tengely Sz.: On the Diophantine equation $L_n = \binom{x}{5}$, Publ. Math. Debrecen 79:(3-4) pp. 749-758. (2011). A Lucas sorozatban található speciális binomiális együtthatók meghatározása található a cikkben. A probléma két génusz kettes görbe egész pontjainak meghatározására vezethető vissza. Megmutattuk, hogy a

$$\mathcal{C}^+ : Y^2 = X^2(X+15)^2(X+20) + 180000000$$

görbe egész pontjaira

$$(X, Y) \in \{(25, -15000), (25, 15000)\},$$

továbbbá a

$$\mathcal{C}^- : Y^2 = X^2(X+15)^2(X+20) - 180000000$$

görbén nem létezik egész pont. A $\mathcal{C}^+$ görbe esetében a Jacobian rangja egy és a Mordell-Weil csoport egy generátora

$$D = (25, 15000) - \infty.$$

Így a klasszikus Chabauty-módszer segítségével az összes racionális pont meghatározható. A $\mathcal{C}^-$ görbe Jacobianjának a rangja 2, ezért a klasszikus Chabauty-módszer nem alkalmazható. Itt a Mordell-Weil csoport egy bázisa a következő:

$$\begin{aligned} D_1 &= (\omega_1, -200\omega_1) + (\overline{\omega}_1, -200\overline{\omega}_1) - 2\infty, \\ D_2 &= (\omega_2, 120000) + (\overline{\omega}_2, 120000) - 2\infty, \end{aligned}$$

ahol ω_1 gyöke az $x^2 - 5x + 1500$ polinomnak és ω_2 gyöke az $x^2 + 195x + 13500$ polinomnak. A Baker-módszer segítségével alsó korlát nyerhető a megoldások méreteire, az úgynevezett Mordell-Weil szita segítségével pedig beláttuk, hogy ha a görbén létezik az ismert pontoktól eltérő egész pont, akkor annak a mérete nagyobb, mint a Baker korlát. A módszer nehézségét az adja, hogy ilyen esetekben ismernünk kell a génusz kettes görbe pontos rangját és a Mordell-Weil csoport egy generátorrendszerét.

(http://www.math.unideb.hu/~tengely/LucasBinom.pdf)

(9) Tengely Sz.: Balancing numbers which are products of consecutive integers, közlésre benyújtva. Behera és Panda 1999-ben definiálta a B_m sorozatot, amely olyan n pozitív egészekből áll, amelyekre

$$1 + 2 + \ldots + (n-1) = (n+1) + (n+2) + \ldots + (n+k).$$

A sorozat elemei kielégítik a következő rekurziót: $B_{m+1} = 6B_m - B_{m-1}$. A cikkben a rekurzív sorozatban található $x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$ alakú egészeket határoztuk meg. A megoldás a Baker-módszer és a Mordell-Weil szita együttes alkalmazásán alapszik. A

$$\mathcal{C}: \quad Y^2 = X^2(X+6)^2(X+8) + 4$$

génusz kettes görbe összes egész pontjának meghatározására vezethető vissza az eredeti probléma. A görbe Jacobianjának a rangja 3, a Mordell-Weil csoport egy bázisa

$$\begin{aligned} D_1 &= (0, 2) - \infty, \\ D_2 &= (-6, 2) - \infty, \\ D_3 &= (\omega, -\omega - 10) + (\overline{\omega}, -\overline{\omega} - 10) - 2\infty, \end{aligned}$$

ahol ω az $x^2 + 7x + 4$ polinom egy gyöke. A Baker-módszer segítségével adódott a

$$\log|x| \leq 3.11 \cdot 10^{430}$$

korlát, a Mordell-Weil szita alapján pedig azt kapjuk, hogy ha létezik a kis megoldásoktól eltérő egész megoldás, akkor

$$\log|x| \geq 1.03 \times 10^{580}.$$

(http://www.math.unideb.hu/~tengely/balancing_PMD.pdf)

(10) Pintér Á., Tengely Sz.: The Korteweg-De Vries Equation and a Diophantine Problem, közlésre benyújtva. Fairlie és Veselov a Korteweg-de Vries egyenlettel kapcsolatban vizsgálták az

$$I_m[u] = \int_{-\infty}^{\infty} P_m(u, u_x, u_{xx}, \ldots, u_m)dx$$

integrálokat. Bizonyos n-szoliton megoldások esetében

$$I_k[u_n] = \frac{(-1)^k 4^{k+2}}{2k+3} \sum_{i=1}^{n} i^{2k+3}.$$

A publikációban azt vizsgáltuk, ezek az integrálok milyen esetekben egyezhetnek meg, azaz mikor teljesül, hogy

$$|I_k[u_n]| = |I_l[u_m]|.$$

Megmutattuk, hogy $k = -1$ és $l \in \{0, 1, 2, 3\}$ esetében csak egy megoldás van: $(l, m, n) = (0, 24, 5)$. Továbbá igazoltuk, hogy ha $k = 0$ és $l \in \mathbb{N}$ úgy, hogy $2l + 3$ prím, akkor az egyenletnek nincs $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ megoldása.
(http://www.math.unideb.hu/~tengely/PinterTengely.pdf)

(11) Fuchs C., Pethő A., Tengely Sz.: On decomposable Rational Functions with given number of singularities, közlésre benyújtva. A cikkben olyan racionális függvényeket vizsgálunk, amelyek $f(x) = P(x)/Q(x), P, Q \in k[x]$ alakúak, ahol k egy algebrailag zárt test, és felírhatóak $g(h(x))$ alakban. Amennyiben rögzítjük a szingularitások számát, akkor az ilyen típusú racionális függvényekre egy struktúra tétel adható S-egységegyenletek, a Mason-Stothers tétel (az *abc*-sejtéssel analóg állítás a polinomok esetében) és a Siegel azonosság segítségével.
(http://www.math.unideb.hu/~tengely/RIMS_2012a.pdf)

(12) Pethő A., Tengely Sz.: On Composite Rational Functions, közlésre előkészítve. Fuchs és Pethő eredményét felhasználva algoritmust adtunk az $f(x) = g(h(x))$ egyenlet megoldásainak meghatározására, ahol f, g, h racionális függvények. Az algoritmus segítségével meghatároztuk az összes racionális függvényt, amelynek legfeljebb 4 szingularitása van és felírható $g(h(x))$ alakban. Továbbá meghatároztuk az 5 szingularitással rendelkező függvények esetében a megoldásokat leíró varietásokat:
(http://www.math.unideb.hu/~tengely/CFunc_n=5.txt.tar.gz). A kombinatorikus robbanás miatt utóbbi esetben a teljes parametrikus megoldás túl sok helyet igényelne. Három szingularitás esetében például megoldás a következő:

$$f(x) = \frac{(x-a+1/2)^2(x-a+1/4)}{(x-a)^4},$$
$$g(x) = (x-b+1)(x-b),$$
$$h(x) = b - 1 + \frac{(x-a+1/2)^2}{(x-a)^2},$$

ahol a, b paraméterek.
(http://www.math.unideb.hu/~tengely/RationalFunction.pdf)

(13) Magma kód implementálása a (12)-ben szereplő $f(x) = g(h(x))$ egyenlet megoldásainak meghatározására. A függvény hívása: $CFunc(t, n, tipus)$, ahol t jelöli a g szingularitásainak a számát, n az f szingularitásainak a száma és $tipus$ az 0 vagy 1, ha S_∞ üres, akkor 0, egyébként pedig 1. Például a három szingularitással bíró $g(h(x))$ alakban felírható racionális függvények esetében a $CFunc(2, 3, 1), CFunc(3, 3, 1)$ és $CFunc(3, 3, 0)$ adja meg az összes lehetséges rendszert. Tekintsük

most a $CFunc(2,3,1)$ esetet. Ekkor 18 rendszert kapunk, ezek egyike

$$\begin{aligned}
&< [1,2,3],\\
&< 1,2,2 >,\\
&[X[1] - X[3] - 1/4 * X[4] + 1/4 * X[5],\\
&X[2] - X[3] - 1/2 * X[4] + 1/2 * X[5]] > .
\end{aligned}$$

Az eredmény három részből áll, az első rész megadja a partíciót, a második a kitevő vektort, a harmadik pedig a szingularitásokra vonatkozó rendszert. A kombinatorikus robbanás miatt az összes rendszer meghatározása nagyobb n értékek esetében nem reális, így rögzített partíció és/vagy rögzített kitevő vektor esetében is használható a kód. Például $CFunc(2,3,1 : PSet := [1,2,3], exptup := [[1,2,2]])$ hívás mellett csak az előző rendszert kapjuk meg a lehetséges 18-ból.
(`http://www.math.unideb.hu/~tengely/CFunc.m`)

A második részben összefoglaljuk az OTKA támogatás segítségével tartott szakmai előadásokat.

(1) 2009. január 29: Integral Points on Families of Elliptic Curves, Winter School on Explicit Methods in Number Theory, Debrecen.
(`http://www.math.unideb.hu/~tengely/images/WS090129.pdf`)

(2) 2009. április 16: Egész pontokról racionálisan, Az Informatikai Kar és a Matematikai Intézet közös Szemináriuma, Debrecen.
(`http://www.math.unideb.hu/~tengely/images/IntSzem041609.pdf`)

(3) 2009. szeptember 4: On the Diophantine Equation $x^2 + C = 2^r y^p$, 19th Czech and Slovak International Conference on Number Theory, Hradec nad Moravicí, Csehország.
(`http://www.math.unideb.hu/~tengely/images/CsehNT_2009aug.pdf`)

(4) 2010. május 25. On the Diophantine Equation $x^2 + C = 2y^n$, Rational Points - Theory and Experiment, ETH Zürich, Svájc.
(`http://www.math.unideb.hu/~tengely/Zurich_2010May25.pdf`)

(5) 2010. október 5. Diophantine problems related to recurrence sequences, Number Theory and its Applications - An International Conference Dedicated to Kálmán Győry, Attila Pethő, János Pintz, András Sárközy, Debrecen,
(`http://www.math.unideb.hu/~tengely/TSz_2010_10_05.pdf`)

(6) 2011. március 4.: Almost perfect squares in Lucas sequences, Number Theory Seminar, Debrecen.
(`http://www.math.unideb.hu/~tengely/NTS20110304.pdf`)

(7) 2011. május 21.: Combinatorial Diophantine Equations, Arctic Number Theory School, Helszinki, Finnország.
(`http://www.math.unideb.hu/~tengely/Helsinki.pdf`)

(8) 2011. augusztus 23.: Combinatorial numbers in recurrence sequences, Paul Turán Memorial Conference, Budapest.
(http://www.math.unideb.hu/∼tengely/Turan100.pdf)

(9) 2011. szeptember 8.: Combinatorial Diophantine Equations, 20th Czech and Slovak International Conference on Number Theory, Stará Lesná, Szlovákia.
(http://www.math.unideb.hu/∼tengely/20thNTC_SL.pdf)

(10) 2012. március 23.: On Composite Rational Functions, Number Theory Seminar, Debrecen.
(http://www.math.unideb.hu/∼tengely/NTS20120323.pdf)

(11) 2012. július 6.: On Composite Rational Functions, 6th European Congress of Mathematics, Arithmetic Geometry Minisymposium, Krakkó, Lengyelország.
(http://www.math.unideb.hu/∼tengely/Krakow2012.pdf)
Wojciech Gajda és Samir Siksek szervezésében az Arithmetic Geometry Minisymposium négy meghívott előadójának egyike voltam
(http://www2.warwick.ac.uk/fac/sci/maths/people/staff/samir_siksek/ecm/)

Debrecen, 2012. szeptember 26. Tengely Szabolcs