A 72655-ös számú „Geometriai mértékelmélet” OTKA kutatás részletes záróbeszámolója

A geometriai mértékelmélet és a hozzá kapcsolódó valós függvénytan legkülönbözőbb területein sikerült új eredményeket elérnünk, jellemzően csoportunk több tagjának együttműködése során. Készítettünk 45 cikket, ezek közül 29 már megjelent, további 9 pedig megjelenés alatt van - jobbára igen rangos nemzetközi folyóiratokban.

Keleti Tamás MTA doktora fokozatot szerzett a "Translations, measures and dimension" című dolgozatával. A disszertáció ezen pályázatban elért eredményeket is tartalmaz.

Harangi Viktor PhD fokozatot szerzett a "Discrete methods in geometric measure theory" című doktori értekezésével, Balka Richárd pedig a "Measure and Category in Real Analysis" című dolgozatával. Mindkét disszertáció ezen pályázatban elért eredményeket tartalmaz.

Kiss Gergely és Vidnyánszky Zoltán menet közben csatlakoztak a projekthez, ők most készítik a PhD disszertációjukat a kutatás eredményeiből.

Az alábbiakban megpróbáljuk röviden leírni azokat a vizsgált kérdésköröket, amelyekben sikerült számottevő előrelépést elérnünk. Ahol és amennyire ez lehetséges ilyen rövid keretek között, a válaszokat is ismertetjük.

Elekes Márton, Keleti Tamás és Máthé András azt vizsgálták, hogy önhasonló illetve önaffin halmazok milyen nagy halmazban tudják metszeni saját maguk egy egybevágó vagy hasonló példányát. Bizonyos feltételek mellett azt találták, hogy a természetes önhasonló illetve önaffin mértékek szerint a metszet csak akkor pozitív mértékű, ha nem üres a relatív belseje, továbbá csak úgy lehet nagyon közel a teljes halmaz mértékéhez, ha a metszet azt tartalmazza. Azt is megvizsgálták, hogy a természetes mérték mikor terjeszthető ki invariáns mértékké.

Keleti Tamás és Máthé András (Esa és Maarit Järvenpäävel közösen) folytonos paraméterezésű Besicovitch halmazokat vizsgáltak. Megmutatták, hogy legalább három dimenziós Euklideszi térben mozgatható folytonosan egy egyenes úgy, hogy nullmértékű halmazt súrol és közben minden irány előfordul. Ha viszont az egyeneseket az irányukkal szeretnénk folytonosan paraméterezni, vagyis minden irányhoz hozzá akarunk folytonosan rendelni egy egyenest, akkor az egyenesek egy korlátos halmazt leszámítva mindent lefednek, sőt páratlan dimenzióban mindent. Másfelől, ha csak szakaszokat akarunk irányukkal folytonosan paraméterezni, akkor azt akármilyen kis mértékű halmazon belül meg tudjuk tenni.

Gyenes Zoltán azt vizsgálta, hogy adott geometriai alakzat egybevágó példányainak uniójára milyen nagy lehet a kerület/terület arány. Egyebek mellett megmutatta, hogy egységnégyzet esetén az arány legfeljebb 5,56, amely sokkal jobb az eddigi legjobb becslésnél és egész közel van az akkor sejtett 4-hez. Azóta Kiss Viktor és Vidnyánszky Zoltán bebizonyították, hogy a sejtés nem is igaz.

Minden teljes metrikus tér rendelkezik az ú.n. Banach fixpont-tulajdonsággal, azaz rajta minden kontrakciónak van fixpontja. Ismert volt, hogy nem teljes metrikus tér is lehet ilyen, hiszen a síknak létezik ilyen tulajdonságú nem zárt része. E. Behrends kérdezte, hogy a számegyenesen is van-e ilyen példa, illetve, hogy milyen bonyolultságú példák léteznek. Elekes Márton minden dimenzióban megadta a (leíró halmazelméleti szempontból) minimális bonyolultságú példát.

Keleti Tamás (Esa és Maarit Järvenpäävel közösen) azt vizsgálta, hogy vetítések családja hogyan csökkentheti a Hausdorff dimenziót. Klasszikus eredmények szerint, ha az összes vetítést tekintjük, akkor majdnem minden vetület Hausdorff dimenziója az eredeti dimenzió és a képtér dimenziójának a minimuma. Sikerült meghatározni, hogy mennyivel csökkenhet ez a dimenzió, ha vetítéseknek csak egy adott paraméterszámú családjára szorítkozunk.

Harangi Viktor bebizonyította, hogy a Koch-féle hópehely görbe tubus-nulla, azaz le lehet fedni tetszőlegesen kis össz-szélességű sávokkal.

Erdős Pál és Füredi Zoltán 1983-ban valószínűségi módszerrel belátták, hogy a d dimenziós euklideszi térben megadható exponenciálisan sok pont úgy, hogy bármely három által meghatározott szög hegyesszög. Harangi Viktor módosította a véletlen módszerüket és ezzel javított az általuk adott alsó becslésen. Vizsgált egy másik, konstruktív megközelítést is. A korábban ismert konstruktív alsó becslések az exponenciálisnál csak jóval gyengébb eredményt adtak. Ez az új konstruktív alsó becslés "majdnem exponenciális", kis dimenzióban pedig felül is múlja az exponenciális véletlen konstrukciókat.

Elekes Márton és Mátrai Tamás (Soukup Lajossal közösen) megvizsgálták, hogy milyen feltételek mellett igaz, hogy ha adott egy euklideszi tér egy részhalmazának egy olyan fedése, amely minden pontot sokszorosan lefed, akkor e fedés halmazai két (vagy akár több) osztályba oszthatóak úgy, hogy mindkét osztály elemei maguk is még fedést alkotnak. A fedés állhat például kompakt vagy konvex halmazokból, poliéderekből, vagy akár egy dimenzióban intervallumokból. A legtöbb esetben a sokszoros fedés végtelenszerest jelent. A terjedelmes dolgozat számos pozitív, negatív és függetlenségi eredményt tartalmaz.

Elekes Márton igazolta a következő fedési tételt; ha adott a számegyenes mérhető részhalmazainak egy olyan sorozata, amely majdnem minden számot végtelenszer lefed, akkor ennek a sorozatnak van egy nulla aszimptotikus sűrűségű részsorozata, amely még mindig majdnem minden számot végtelenszer fed. (Ebből Schweitzer-feladat is született.) Ennek alkalmazásaként igazolta, hogy a nulla aszimptotikus sűrűségű halmazok ideálját nem rombolja le a random-forszolás.

Harangi Viktor, Keleti Tamás és Máthé András a következő problémát vizsgálta. Mekkora lehet (Hausdorff dimenzió szempontjából) az n dimenziós euklideszi tér egy kompakt részhalmaza feltéve, hogy nem tartalmaz valamilyen adott alfa szöget, azaz nincs három pontja, melyek alfa szöget határoznának meg? Másik megfogalmazásban: mekkora dimenzió garantálja, hogy a halmaz biztosan tartalmaz alfa szöget? Kiss Gergellyel, Maga Péterrel, Pertti Mattilával és Strenner Balázzsal közös cikkükben megmutatják, hogy ha egy kompakt (vagy akár analitikus) halmaz dimenziója nagyobb, mint n-1, akkor a halmaz biztosan tartalmaz minden szöget 0 és 180 fok között. Ha a dimenzió nagyobb, mint n/2+1/2, akkor a halmazban mindig található derékszög.

Vizsgálták a fenti probléma egy approximatív változatát is, amelyben adott szöghöz közeli szögeket szeretnének garantálni elegendően nagy dimenziós halmazokban. Megmutatták, hogy ha a dimenzió nagyobb, mint 1, akkor a halmaz tartalmaz 90 fokhoz akármilyen közeli szögeket. Hasonló állítást bizonyítottak 60 és 120 fok esetén is, valamint egy konstrukcióval igazolták, hogy más alfa szögekről hasonló nem állítható.

Balka Richárd és Elekes Márton (Buczolich Zoltánnal közösen) egy új fraktáldimenzió-fogalmat definiáltak, melyet topologikus Hausdorff-dimenziónak neveztek el, hiszen bizonyos szempontból a topologikus dimenzióra, más szempontból pedig a Hausdorff-dimenzióra hasonlít. Eredeti motivációjuknak megfelelően ennek segítségével megválaszolták Buczolich egy kérdését, hiszen ez a dimenziófogalom írja le a fraktálokon értelmezett tipikus folytonos függvények szinthalmazainak Hausdorff-dimenzióját. De az új fogalom sok más szempontból is érdekesnek bizonyult, például alulról becsüli a Hausdorff-dimenziót, így remélhetőleg számos alkalmazásra talál.

Elekes Márton, Keleti Tamás és Máthé András a következő geometriai rekonstrukciós problémát vizsgálták. Legyen adva korlátos mérhető halmazok egy családja egy euklidészi térben. Azt mondjuk, hogy néhány halmaz (az úgynevezett teszthalmazok) rekonstruálják a család egy elemét, ha teszthalmazokkal vett metszetek Lebesgue-mértéke meghatározza, hogy a család mely eleméről van szó. Megmutatták például, hogy $d > 2$ esetén egy fix korlátos mérhető pozitív mértékű R^d-beli halmaz egy eltoltját d teszthalmazzal lehet rekonstruálni, és ez éles. Kisebb dimenzió esetén a pontos érték nem ismert. A bizonyítások mély Fourier-analízis mellett algebrai topológiai eszközöket is használnak.

Keleti Tamás és Máthé András (Ondřej Zindulkával közösen) megmutatták, hogy bármely teljes szeparábilis metrikus tér k-nál nagyobb Hausdorff-dimenziós analitikus részhalmaza Lipschitz-leképezéssel k-dimenziós kockára képezhető. Ugyanakkor azt is megmutatták, hogy létezik tetszőlegesen nagy Hausdorff-dimenziójú szeparábilis metrikus tér, amely nem képezhető szakaszra semmilyen egyenletesen folytonos függvénnyel sem. Mindezek alkalmazásaként pedig megválaszolták Urbanski egy kérdését is az általa definiált transzfinit Hausdorff-dimenzióval kapcsolatban.

Balka Richárd és Elekes Márton folytatták merev függvények szerkezetének vizsgálatát. Egy n-változós valós f függvényt vízszintesen merevnek hívjuk, ha az f(cx) alakú függvények grafikonjai egybevágóak minden pozitív c-re. C. Richter igazolta, hogy egy változóban a vízszintesen merev folytonos függvények az egyenesek, ők pedig a belátták, hogy a kétváltozós vízszintesen merev folytonos függvények az affin síkok.

Kolmogorov több mint 80 évvel ezelőtt a következőt kérdezte: Igaz-e, hogy minden síkbeli mérhető halmaz ráképezhető egy legfeljebb epszilonnal kisebb területű poligonra kontrakcióval? Balka Richárd és Máthé András konstruált egy korlátos összefüggő F-szigma ellenpéldát, amelyet Elekes Márton egyszeresen összefüggő nyílt halmazra javított.

Elekes Márton (Juris Steprans-szal) megoldotta David H. Fremlin következő problémáját. A Haar-null halmazok fogalmát Christensennek sikerült kiterjesztenie a nem lokálisan kompakt esetére. Fremlin azt kérdezte, hogy a definíció egy lehetséges természetes egyszerűsítése ekvivalens-e az eredetivel. Elekesék negatív választ adtak, amihez Keleti Tamás és Udayan Darji egy korábbi eredményét, és meglepő módon a pakolási dimenzió fogalmát is felhasználták. Ezzel kapcsolatban azt is megmutatták, hogy halmazok második kategóriájúsága konzisztensen tükröződik Cantor-halmazokon.

Vidnyánszky Zoltán folytatta az olyan Π^1_1 halmazok osztályozását, melyek adott I ideálbeliek és minden I-beli Π^1_1 részhalmazuk. Ismert volt, hogy ha I az első kategóriájú halmazok vagy a nullmértékűek ideálja, akkor létezik ilyen maximális halmaz, sőt a kategória esetén a halmaz elemei viszonylag egyszerűen leírhatóak, viszont a nullmértékű eset egyelőre nem tisztázott. A meglévő eredményeket használva belátta, hogy ha Z^ω-ban I-t a megszámlálható halmazok ideáljának választjuk, akkor egy olyan koanalitikus Haar-null halmazt kapunk melynek nincs Borel Haar-null burka. Más módszerekkel Elekes Márton és Vidnyánszky Zoltán megmutatták, hogy ilyen halmaz létezése ZFC-ből is levezethető.

Elekes Márton és Vidnyánszky Zoltán folytatták a Haar null halmazok vizsgálatát nem lokálisan kompakt csoportokban. Megmutatták, hogy minden nem lokálisan kompakt Abel lengyel csoportban van olyan Haar null halmaz, aminek nincs Haar null G-delta burka. Ezzel megválaszolták J. Mycielski egy bő 20 éves problémáját.

Balka Richárd és Elekes Márton (U. B. Darjival) ezen Haar null fogalmat geometriai mértékelméleti szempontból is vizsgálták. Kirchheim nevezetes tétele szerint az n-dimenziós kockán értelmezett (Baire kategória értelmében) generikus folytonos függvény tipikus szinthalmaza n-1 Hausdorff-dimenziójú. Balka, Darji és Elekes azt a meglepő tételt igazolta, hogy (a Haar null fogalom értelmében) majdnem minden függvényre ez a dimenzió n.

A Haar null fogalmat valós függvénytani szempontból is vizsgálták. A nevezetes Bruckner-Garg tétel pontosan leírja a (Baire kategória értelmében) generikus folytonos valós függvény szinthalmazainak topológiáját. Balka, Darji és Elekes azt mutatta meg, hogy ez a viselkedés (a Haar null fogalom értelmében) “szigorúan 0 és 1 közötti valószínűségű”.

Csörnyei Marianna meghívott előadóként "Differentiability of Lipschitz functions, structure of null sets and other problems" címmel tartott előadást a 2010-es ICM-en. A kongresszuson a pályázat támogatásával vett részt.

Balka Richárd, Farkas Ábel, Jonathan Fraser és James Hyde tetszőleges K kompakt metrikus térre és n pozitív egészre meghatározták a tipikus f: K->R^n függvény f(K) képe fontosabb (topologikus, Hausdorff, pakolási, Minkowski) dimenzióinak értékét, melynek során általánosították H. Kato egy eredményét.

A topologikus Hausdorff dimenzió definícióját iterálva kaphatjuk meg az n. induktív topologikus Hausdorff dimenziót, melynek segítségével Balka Richárd tetszőleges K kompakt metrikus térre és n pozitív egészre leírta a tipikus f: K->R^n leképezés fibrumainak Hausdorff-dimenzióját. Ez általánosítja mind a B. Kirchheim által leírt K=[0,1]^m, mind a Balka R., Buczolich Z. és Elekes M. által vizsgált n=1 esetet.

Balka Richárd belátta, hogy léteznek nem zárt F-szigma és G-delta halmazok a számegyenesen (F és G), hogy minden F->F (hasonlóan G->G) gyenge kontrakció konstans. Ez válaszol Elekes M. kérdésére, akit olyan metrikus terek vizsgálata motivált, melyekben teljesül a Banach Fixponttétel. A bizonyítás fő eszköze az általánosított Hausdorff-mérték, az ezzel kapcsolatban igazolt tétel az alábbi eredmény bizonyításában is felhasználásra került.

Balka Richárd és Máthé András bebizonyította, hogy minden lengyel térben a tipikus kompakt halmaz vagy véges vagy pedig létezik hozzá egy folytonos gauge-függvény, amely szerint a halmaz Hausdorff-mértéke pozitív és véges. Ez válaszol egy C. Cabrelli, U. B. Darji és U. M. Molter által felvetett kérdésre.

Csörnyei Mariannának Ville Suomalaval sikerült a számegyenes Cantor halmazainak egy nagy családján belül jellemezni azokat a halmazokat, amelyek minden "doubling" mérték szerint pozitív illetve nullmértékűek. Atomos "doubling" mértékekre is vizsgálták ezt a problémát és sikeresen megválaszolták Kaufman és mások kérdéseit.
Balka Richárd és Harangi Viktor kontinuumok (kompakt, összefüggő halmazok) és rektifikálható görbék metszetét vizsgálták euklideszi terekben. B. Kirchheim kérdésére válaszolva bebizonyították, hogy minden kontinuumhoz megadható egy rektifikálható görbe úgy, hogy a metszetük Hausdorff-dimenziója 1. (Gromov egyik könyvében azt sugallta, hogy léteznek kontinuumok, melyekre minden

ilyen metszet 1-nél kisebb dimenziós.)

Balka Richárd igazolta, hogy semmilyen nem megszámlálható lokálisan kompakt kommutatív lengyel csoporton nincs additív Erdős-Sierpinski leképezés, ami általánosítja Bartoszynski és Kysiak eredményeit.

Egy n-változós valós f függvényt függőlegesen merevnek hívunk, ha a cf alakú függvények grafikonjai egybevágóak minden pozitív c-re. Balka Richárd és Elekes Márton karakterizálták a kétváltozós függőlegesen merev folytonos függvényeket. Ezzel egy korábbi munkájukat folytatták, ahol az egyváltozós függőlegesen merev folytonos függvények karakterizálásával igazolták Jankovic sejtését.

Ahogy sűrű gráfoknak, úgy véges részbenrendezett halmazoknak is lehet definiálni limeszobjektumát. Máthé András és társszerzői (Jan Hladký, Viresh Patel és Oleg Pikhurko) megválaszolták Svante Janson egy kérdését véges részbenrendezett halmazok limeszobjektumairól. Analitikus és kombinatorikus eszközökkel is megmutatták, hogy minden ilyen limeszobjektum is lényegében kibővíthető egy teljes rendezéssé (vagyis ha tekintjük a [0,1] intervallumon a Lebesgue-mértéket és a standard rendezést, ebbe beágyazható minden limeszobjektum).

Mátrai Tamás megvizsgálta, mely Borel ekvivalenciarelációk hasonlíthatók össze az l_p Banach terek által indukált Borel ekvivalenciarelációkkal. Su Gao egy sejtését megcáfolva kiderült, hogy sokkal több ilyen ekvivalenciareláció van, mint azt korábban gondolták.

Egy 1980-ban megjelent cikkében Laczkovich Miklós az alábbi kérdést tette fel: ha egy valós f függvény minden f(x+h)-f(x) differencia függvénye Baire-alfa osztályú, igaz-e hogy f előáll egy Baire-alfa osztályú függvény és egy additív függvény összegeként? Hamar kiderült, hogy a kérdésre nemleges a válasz a kontinuum hipotézis feltételezése mellett. Mátrai Tamásnak Hiroshi Fujitával sikerült konzisztens pozitív választ adni Laczkovich kérdésére. Továbbá kiderült, hogy ha f bizonyos definiálhatósági feltételeknek eleget tesz, akkor a pozitív válasz ZFC eredmény.

Mátrai Tamás Kenilworth c. cikkben publikált új szigma-ideáljáról kiderült, hogy ellenpéldát mutat a téma egyéb, az irányított halmazok Tukey hierarchiájával kapcsolatos nyitott kérdéseire is.

Mátrai Tamás sokat foglalkozott analitikus ideálok kofinalitási típusaival. Gyakran célszerű azonosnak tekinteni két ideált, ha kofinalitásuk megegyezik. Klasszikus eredmény, hogy tetszőleges ideálok között ``maximálisan'' sok különböző kofinalitási típus létezik. A More cofinal types of definable directed orders c. cikk egyik fő eredménye ugyanezen állítás igazolása különféle Borel ideálcsaládok körében. Ebben a cikkben szintén sikerül teljesen leírni a ``klasszikus'' analitikus ideálok kofinalitási típusai között fennálló hierarhiát. Az Infinite dimensional perfect set theorems c. munka azt a problémát vizsgálja, hogy amennyiben két analitikus ideál kofinalitása megegyezik, lehetséges-e ezt folytonos, Borel vagy legalább projektív mérhető megfeleltetéssel tanúsítani. Kiderül, hogy a probléma független a halmazelmélet szokásos axiómarendszerétől. Ez az eredmény rendkívül meglepő, mivel általános érvényű leíró halmazelméleti eredmények szerint egy analitikus objektumok között fennálló kapcsolathoz szinte kivétel nélkül található definiálható tanú. A cikk fő eredményeinek bizonyításában kulcsszerepet játszik egy újfajta halmazelméleti játék.

Mátrai Tamás, Samuel Coskey-val es Juris Steprans-szal közös munkájában megvizsgálta, hogy a kontinuum számosságinvariánsai (pl. domináló szám, fedési szám, stb.) közti nevezetes, a Van Douwen diagramban összefoglalásra került egyenlőtlenségek közül melyek tanúsíthatóak definiálható, pl. Borel mérhető, Tukey leképezésekkel. A téma érdekességét az adja, hogy bár a kérdéses számosságinvariánsok értéke független a halmazelmélet szokásos ZFC axiómarendszerétől, egy Borel függvények segítségével igazolt egyenlőtlenség már abszolút, azaz minden ZFC modellben igaz. Sikerült teljesen feltérképezni a Van Douwen diagramot: megtlalálták az összes Borel Tukey leképezéssel tanúsítható egyenlőtlenséget, illetve belátták, hogy más ilyen leképezés nem létezik.

Mátrai Tamás konstruált egy folytonos valós függvényt, mely majdnem minden pontban nem differenciálható, ám a gráfja mégis "monoton". A "monoton gráf" tulajdonságot Ondrej Zindulka fejlesztette ki valós függvények differenciálhatóságának vizsgálata céljából. Ez az eszköz meglepően sokoldalúnak bizonyult: geometriai mértékelméleti alkalmazásairól számos publikáció született. A Mátrai Tamás által konstruált példa az O. Zindulka, M. Hrusak, A. Nekvinda és V. Vlasak társszerzőkkel írt cikkben jelent meg.

Kiss Gergely lineáris függvényegyenletek megoldhatóságát vizsgálta pontosabban azok nem triviális megoldásainak létezését. Ennek eredményeként Varga Adriennel közös munkájában egy szükséges és elégséges feltételt mutattak a lineáris függvényegyenletek nem triviális megoldásának létezésére. A munka épít Laczkovich M., Székelyhidi G. és Székelyhidi L.-nek a diszkrét spectrálanalízis és -szintézis vizsgálatában elért eredményeire.

Kiss Gergely megadott egy technikát, amivel a lineáris függvényegyenletek összes megoldását meg lehet adni minden olyan esetben, amikor a paraméterek Q feletti algebrai számok. A cikk fő észrevétele, hogy a kérdés visszavezethető a diszktrét spektrálszintézis kérdésére. Megmutatta, hogy megoldások a komplex számtest egy résztestre szorítkozva izomorfizmusok szorzatáinak komplex együtthatós lineáris kombinációja. Az ezzel kapcsolatos cikk olyan példát is mutat, ahol egy t transzcendens elemet választva a paraméterek közé a korábbi struktúra a szétesik, és a megoldások tere akár végtelen sok lineárisan független megoldást is tartalmazhat.

Kiss Gergely és Laczkovich Miklós közös munkájukban tetszőleges, legalább kétváltozós lineáris egyenletrendszereket tekintettek és azt vizsgálták, hogy meg lehet-e adni ezen egyenletek megoldásterének egy speciális bázisát, mely ekvivalens a K-additív függvényet tartalmazó varietások spectrálszinézisével. Ezt belátták minden K-ra, majd ezt az eredményt alkalmazták egy általános lineáris függvényegyenletek megoldása halmazának teljes leírására.

Kiss Gergely és Somlai Gábor megmutatták, hogy minden d dimenziós gömb, ahol d>1 egész szám, de nem 2 vagy 5, felbontható véges sok egybevágó diszjunkt részre. Részeredmények korábban is ismertek voltak 3-mal osztható dimenziókban G. Kiss és M. Laczkovich korábbi eredményei nyomán. A korábbi cikkben a felbontás részeinek számára exponenciálisnál is nagyobb korlátot adtak a dimenzió függvényében. G. Kiss és G. Somlai lineáris felső korlátot adtak a részek számára, ami nagyságrendben optimális eredmény S. Wagon lineáris alsó korlátját is figyelembe véve.