The Lattice Cohomology was introduced by the PI in order to connect the the topological invariants (like Seiberg-Witten or Heegaard Floer) of the link with classical singularity theoretical invariants of normal surface singularities. The theory became rather successful: conjecturally it coincides with the Heegaard Floer modules, it satisfies similar exact sequences as the Heegaard Floer homology, and the PI proved that at Euler characteristic level it provides the Seiberg Witten invariant of the link, which also can be related with certain sheaf cohomologies of the singularity. Moreover, it provides a new classification possibility for normal surface singularities: the complexity of these modules might serve as a hierarchy of complexity of singularities. Using these techniques the PI established several crucial results. First, for splice quotient singularities he proved with Braun the Seiberg-Witten Invariant Conjecture (of Nicolaescu-Némethi), namely that the Seiberg-Witten invariant of the link determines the equivariant geometric genera of the analytic type. Moreover, for the same family he established the Campillo-Delgado-Gusein Zade type identity. This identifies two multi-variable series. One of them is topological, expressed from the resolution graph of the link. The other one is analytic of nature, it is the Poincaré series associated with the multi-variable divisorial filtration. It is interesting to mention that for such series the notion of 'periodic constant' can also be introduced (as a generalization of the corresponding notion introduced for one-variable series by Némethi-Okuma). The point is that the periodic constant of the topological series is the Seiberg-Witten invariant of the link, while the periodic constant of the analytic series is the (equivariant) geometric genus. In this way the Campillo-Delgado-Gusein Zade identity lifts the identity predicted by the Seiberg-Witten Invariant Conjecture.

Another important question of complex surface singularities is to decide whether the singularity admits a deformation which is a rational homology disk (QHD). The existence of such smoothing can be conveniently applied in smooth 4-manifold theory when one tried to construct exotic smooth structures on manifolds with small Euler characteristics. A strong necessary condition on the resolution graph of the singularity admitting a QHD smoothing has been worked out in a joint project by A. Stipsicz with Jonathan Wahl and Zoltán Szabó; according to this result the graph should be a member of a family which can be described in terms of combinatorial data. The proof of this result rests on certain complex analytic theorems and a rather involved combinatorial argument. Further studying the same question, in a joint project with Mohan Bhupal, Stipsicz actually classified singularities with QHD smoothing among the ones which have star-shaped resolution graphs (for example, weighted homogeneous singularities all do). The proof in this case is built on symplectic topological results. In a further paper we verified the uniqueness of the smoothing in many specific cases. The main obstruction in extending the above results from the weighted homogeneous case to more general singularities is the lack of appropriate compactifying divisor (or concave filling) which we could symplectically glue to a smoothing. In a joint project with David Gay we described a symplectic 'cap' in some specific cases (more precisely when the graph had no 'bad' vertices). It is worth pointing out that Némethi (using different methods) also found such concave fillings — hopefully we will be able to verify that these concave fillings are, indeed, diffeomorphic.

In terms of applicability it is a crucial question whether when substituting the resolution in a symplectic manifold with a smoothing, the result still admits a symplectic structure or not. For certain singularities with QHD smoothing the positive answer has been verified in a paper with David Gay, and later we extended these methods to further singularities and further smoothings. Most probably all necessary techniques are available to answer this question in full generality, we hope that we will be able to close this small subfield soon.

The case of more general smoothing was also considered. Némethi together with Popescu Pampu verified Lisca's Conjecture. More precisely, they proved that for a fixed cyclic quotient singularity the set of Milnor fibers associated with all the smoothing components of the deformation space coincides with the set of Stein fillings of the link of the singularity. The later set was established by Lisca (via classification of the fillings of lens spaces), while the singularity deformations were described by de Jong and van Straten. Nevertheless, the two descriptions were rather far from each other, presented in two different areas of mathematics. In fact, certain parts of this correspondence were also extended to the case of sandwiched singularities as well (constructing some canonical caps of the fillings).

The Monodromy Conjecture of Denef and Loeser is one of the most interesting conjectures of hypersurface singularity theory, still open. It connects the poles of the topological zeta function with the eigenvalues of the monodromy action. In two joint articles with W. Veys we extended the conjectures/statements to the general singularity setting (for functions germs defined on singular spaces and for certain 'allowed' differential forms) with the hope that we find the right category suitable for induction or deeper algebraic construction which would permit an inductive proof. Surprisingly we found that in the general context there are further obstruction: already in the surface case we had to consider a certain generalization of the semigroup condition of Neumann-Wahl (which was originally considered in a rather different situation) in order to be able to extend the wished properties. In this work we proved a splice formula for the topological zeta function, we introduced allowed differential forms, and we proved that the poles of the topological zeta function associated with germs satisfying the semigroup condition and allowed differential forms provide eigenvalues of the algebraic monodromy operator.

A magyar fordítás:

A PI a Rácspont Kohomológiát azzal a szándékkal vezette be, hogy egyesítse és kapcsolatot teremtsen egy normál felület szingularitás csomójának topológiája (Seiberg Witten invariánsok és a Heegaard Floer homológia), valamint a szingularitás klasszikus invariánsai között. Az elmélet eredményesnek bizonyult: sejtés szerint megegyezik a Heegaard Floer modulusokkal, bizonyos egzakt soroknak tesznek eleget a Heegaard Floer homológiához hasonóan, Euler karakterisztika szinten meg a csomó Seiberg-Witten invariánsát adja, ami a szingularitás analitikus típusa által meghatározott kéve-kohomológiákkal is összekapcsolható.

Továbbá, új lehetőséget ad a normál felület szingularitások osztályozására: a modulusok bonyolultsága a szingularitások hierarkiáját kódolja.

A rácspontkohomológia módszereire támaszkodva a PI több kulcseredményt is bizonyított: az első (Braun Gáborral közösen) elért eredmény bizonyítja a (Némethi-Nicolaescu féle) Seiberg-Witten invariáns sejtést 'splice quotient' szingularitásokra, ami szerint a csomó Seiberg-Witten invariánsa megegyezik az analitikus típushoz rendelt geometriai genusszal. A második eredmény a Campillo-Delgado-Gusein Zade féle identitást adja. Ez két többváltozós hatványsort azonosít. Az egyik topologikus: a rezoluciós gráfból iródik fel. A másik a többváltozós divizoriális filtrálás Poincaré sora. Azonosságuk a szingularitás elmélet egyik legerősebb egybeesése. A két eredmény között szoros kapcsolat áll fent, amit a többváltozós hatványsorokhoz rendelt 'periódikus konstans' teremti meg (ez a Némethi-Okuma egyváltozós sorokhoz rendelt periódikus konstans általánosítása). A kapcsolat az, hogy a topológikus sorhoz rendelt konstans pontosan a Seiberg-Witten invariáns, amíg az analitikus sorhos rendelt konstans a geometriai génusz. Ezért a Campillo-Delgado-Gusein Zade identitás a Seiberg-Witten Invariáns Sejtés által kijelölt azonosság 'felemeltje'.

Komplex felület-szingularitások tanulmányozásának egyik fontos, és a sima 4-sokaságok elméletében jól alkalmazható kérdése az, hogy mely szingularitásnak van olyan deformációja, melynek racionális homologiája a gömb racionális homologiájával egyezik meg. Az ilyen szingularitások fontos szerepet játszottak kis Euler karakterisztikájú egzotikus 4-sokaságok megkonstruálásában is. Egy fenti tulajdonságú (un. QHD) simitás létezésére Stipsicz András Szabó Zoltánnal es Jonathan Wahllal közös dolgozatában adott egy erős szükséges feltételt; a rezoluciós gráfnak az eredmény szerint egy kombinatorikusan jól leírható család tagjának kell lenni. A tétel bizonyítása bizonyos komplex analitikus tételek felhasználásával egy meglehetősen bonyolult kombinatorikus érvelésen alapul. Ugyanezt a kérdést tovább vizsgálva, Mohan Bhupal-lal a QHD simitással rendelkező olyan szingularitásokat osztályozták, melyeknek rezoluciós gráfja csillag alakú (ilyenek pl. a súlyozott homogen szingularitások). A bizonyítás itt alapvető szimplektikus topológiai eredményekre épül. Egy további dolgozatban pedig a QHD simitások egyértelműségét látták be jónéhány speciális esetben. A fenti eredmény súlyozott homogén esetről való kiterjesztésének fő akadálya az, hogy nehéz találni megfelelő kompaktifikáló divizort (illetve alkalmas konkáv betöltést) amit a simitáshoz lehet ragasztani. Stipsics Andrásnak David Gay-el végzett közös kutatásukban egy ilyen szimplektikus 'sapkát' írtak le bizonyos kényelmes esetekben (pontosabban, amikor a gráfnak nincs 'rossz' pontja). Megjegyzendő, hogy Némethi András, más módszerrel egy hasonlóan kinéző konkáv betöltést talált — reméljük hamarosan belátható lesz, hogy a két konkáv betöltés diffeomorf.

Alkalmazhatóság szempontjából nagyon fontos kérdés, hogy a rezoluciós gráfot a simitásra cserélve egy szimplektikus 4-sokaságba, az eredmény szimplektikus lesz-e. Ezt sikerült bizonyos QHD szingularitásokra David Gay-jel belátni, majd egy további közös munkánkban további szingularitásokra és más simitásokra is kiterjesztettük az eredményt. A kérdés teljes megválaszolására is valószínűleg rendelkezésre állnak már a technikák, reméljük, hogy hamarosan megszületik ezt a részkérdést lezáró dolgozatunk is.

Az általános simitások esetében Némethi Popescu Pampuval bebizonyította a Lisca sejtést. Ez azt állítja, hogy egy rögzített ciklikus hányados szingularitás deformációihoz rendelt Milnor fibrumok halmaza megegyezik a szingularitás csomójának (ez egy lencse tér) Stein (vagy szimplektikus) betöltéseivel. A beöltéseket Lisca osztályozta, amíg a deformació elméleti Milnor fibrumokat de Jong és van Straten írta le. A két leírás a matematika eléggé távoli területeinek nyelvezetén fogalmazódik meg, azonosításuk nem triviális.

Hasonló részleges eredmények születtek a szendvics szingularitások eseteiben is.

A Denef-Loeser féle Monodrómia Sejtés a hiperfelület szingularitások elméletének egyik legérdekesebb sejtése, még megoldatlan. A szingularitás topológiai zeta függvényének pólusait köti össze a monodrómia sajátértékeivel. Veys-szel írt két közös dolgozatban kiterjesztjük a sejtés állításait (és az eddigi részleges eredmények egy részét) arra a tágabb esetre amikor szinguláris tereken tekintünk függvénycsirákat és a szerepet játszó differenciál forma is általánosabb. Ez reményeink szerint lehetőséget ad indukciós lépések megszerkesztésére ami az eredeti sejtést is bizonyítaná. Meglepetésünkre, az új kategoriában újabb megszorítások szükségesek: Neumann-Wahl felszoport feltételének egy valtozatára van szükség pozitív eredmények bizonyításához. A dolgozatok a topológiai zeta függvény 'splice' formuláit is adja (az Eisenbud-Neumann féle 'splice'–felbontásra nézve).