A T67642-ES OTKA PÁLYÁZAT ZÁRÓJELENTÉSE

A KUTATÁS EREDMÉNYEI

A pályázat támogatásával 29 dolgozatot írtam, ezek közül 25 már meg is jelent nemzetközi szakfolyóiratokban, 4 megjelenés alatt van illetve nemzetközi konferenciákon 10 előadást tartottam.

A Fourier sorok elmélete hosszú múltra tekinthet vissza. E téma legmélyebb tételét Carleson bizonyította 1969-ben: egy tetszőleges egyváltozós L_p-beli ($1 < p < \infty$) függvény Fourier sora majdnem mindenütt konvergál a függvényhez. Az összegzési eljárások a Fourier analízis egy fontos ágát alkotják. Ismeretes, hogy ha egy Fourier sor részletösszegei divergensek, egy alkalmas összegzési eljárással kaphatunk konvergenciát. Például egy L_1-beli függvény Fourier vagy Walsh-Fourier sora lehet divergens, de Fejér közepei majdnem mindenütt konvergálnak a függvényhez. Hasonlóan az inverz Fourier transzformáltra vonatkozó egyenlőséget (amely csak "szép függvényekre" működik) is ki lehet terjeszteni egy tágabb függvényosztályra egy alkalmas összegzéssel. Az elmúlt időben sok kutató foglalkozott azzal, hogyan lehet ezeket az eredményeket általánosítani többváltozós Fourier sorokra.

A Gábor analízis (vagy idő-frekvencia analízis) is az elmúlt 20 évben került az érdeklődés középpontjába. A magyar Gábor Dénes ötletére alapozva Janssen, Daubechies, Feichtinger, Benedetto, Christensen, Gröchenig, Heil és Walnut munkássága nyomán vált az idő-frekvencia analízis a harmonikus analízis önálló, gyorsan fejlődő ágává. A Gábor analízisnek számos gyakorlati alkalmazása van, pl. a kép- és jelfeldolgozásban, illetve a kommunikációelméletben (mobil telefonok). A Gábor analízis alapjában véve lokális Fourier elméletnek tekinthető, szemben a Fourier sorokkal, amely csak periodikus függvényekkel foglalkozik, vagy a Fourier transzformálttal, amely csak globális képet ad a függvény viselkedéséről. Az idő-frekvencia analízis Gábor frame-ekkel foglalkozik, azaz

$$\{M_{\beta n} T_{\alpha k} g : k, n \in \mathbb{Z}^d\}$$

alakú frame-ekkel, ahol $g \in L_2(\mathbb{R}^d)$ egy ablakfüggvény, M a modulációs T pedig az eltolás operátor. A frame nem feltétlen lineárisan független vagy ortonormált rendszer.

Számos természetes kapcsolat van a szummációelmélet és a Gábor analízis között. Ezen pályázat keretein belül alapvetően két irányban folytattam a kutatásaimat. Egyrészről a Gábor analízis eszközeivel, illetve az ott használt terekkel vizsgáltam a Fourier sorok és transzformáltak összegzéseit. Másrészről az összegzési eljárásokat alkalmaztam a Gábor analízisben, és a Gábor sorok, illetve Gábor transzformált összegzéseivel foglalkoztam. Ez a téma igen újnak mondható, a szakirodalomban alig-alig fordulnak elő erre vonatkozó eredmények.

A Gábor sorfejtésekre ismeretes, hogy ha g és γ négyzetesen integrálható függvények duális Gábor frame-eket generálnak akkor

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \sum_{n \in \mathbb{Z}^d} \langle f, M_{\beta n} T_{\alpha k} \gamma \rangle M_{\beta n} T_{\alpha k} g$$

L_2-normában. Megvizsgáltam ennek a konvergenciának a kiterjesztéseit modulációs terekben, ha g és γ mindketten a Feichtinger algebrában vannak, illetve L_p $(1 < p < \infty)$ terekben, ha g és γ a $W(L_\infty, \ell_1)$ Wiener amalgám tér elemei. Hasonlóan a Fourier sorok elméletéhez ez nem működik, ha $p = 1$ vagy $p = \infty$. Ha a Gábor sor egy összegzését vesszük, akkor az előző konvergenciaeredmény már igaz $p = 1$-re, illetve bizonyos esetben $p = \infty$-re. Gábor sorok összegzéseinek majdnem mindenütt való konvergenciájával is foglalkoztam. Igazoltam a jól ismert Fejér illetve Lebesgue tételek megfelelőjét Gábor sorokra, azaz, hogy egy integrálható függvény Gábor sorának összegzése majdnem mindenütt tart a függvényhez. Az összegzést egy θ függvény segítségével definiáltam (úgynevezett θ-összegzés), ami tartalmazza az összes jól ismert összegzést, például a Fejér, Riesz, Weierstrass, Picard, Bessel és Riemann összegzéseket. Általánosan, ha θ egy Herz térben van, akkor a Gábor sor összegzése majdnem mindenütt konvergál. Ennek nagyfokú általánosításaként kaptam, ha f a $W(L_1, \ell_\infty)$ Wiener amalgám térben van, ami sokkal nagyobb, mint az L_1 tér, akkor is igaz a majdnem mindenütt való konvergencia. Mindeközben a Hardy-Littlewood egyenlőtlenség új változatait is bebizonyítottam.

Ismeretes a Gábor együtthatókra, hogy

$$A \|f\|_2 \leq \Big(\sum_{k,n \in \mathbb{Z}^d} |\langle f, M_{\beta n} T_{\alpha k} g \rangle|^2 \Big)^{1/2} \leq B \|f\|_2.$$

Ennek az egyenlőtlenségnek létezik kiterjesztése modulációs terekre és L_p $(1 < p < \infty)$ terekre is. Összhangban a Gábor analízis gondolataival megvizsgáltam egy új Hardy teret, az úgynevezett lokális Hardy teret. Általánosítva az előző modulációs és az L_p terekre vonatkozó eredményt, szükséges és elégséges feltételt adtam a Gábor együtthatók segítségével arra, hogy egy függvény a lokális Hardy térben legyen. A rövid-idő Fourier transzformáltra vonatkozó multiplier tételeket bizonyítottam. Az inverz Gábor transzformáltra új konvergencia tételeket láttam be a Riemann közelítõ összegek segítségével.

A Fourier sorok összegzései témakörben erõs θ illetve Marcinkiewicz összegzéseket vizsgáltam többváltozós Fourier transzformáltakra. Marcinkiewicz és Zygmund klasszikus tétele többváltozós integrálható függvények Fourier soráról illetve transzformáltjáról mond ki majdnem mindenütt vett konvergenciát, ha az indexek egy kúpban helyezkednek el. Az egyik cikkemben ezt a kúp feltételt gyengítettem úgynevezett kúpszerű halmazokra. Itt újfajta, a kúpszerű halmaztól függő Hardy tereket vezettem be. A H_p Hardy terek fontos szerepet játszanak a harmonikus analízisben. Számos olyan tétel van, amely igaz az L_p $(1 < p < \infty)$ terekre és a H_1-re, de nem igaz L_1-re. Így a H_1 Hardy tér az L_p $(1 < p < \infty)$ terek természetes kiterjesztésének is tekinthető. Foglalkoztam a $\sigma_*^\theta := \sup |\sigma_n^\theta|$ maximáloperátor korlátosságával, ahol $n \in \mathbb{N}^d$ a kúpszerű halmazban van és

$$\sigma_n^\theta f(x) := \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{k_d=-\infty}^{\infty} \theta\Big(\frac{-k_1}{n_1+1}, \dots, \frac{-k_d}{n_d+1}\Big) \hat{f}(k) e^{\imath k \cdot x}$$

jelöli a θ függvény által generált összegzésre vonatkozó közepeket. Ekkor σ_*^θ korlátos L_p-n $(1 < p < \infty)$, de nem korlátos L_1-en. Igazoltam, hogyha θ kielégít bizonyos, elég tág feltételeket, akkor σ_*^θ korlátos H_p-ből L_p-be $(p_0 < p < \infty)$, ahol $p_0 < 1$. Emlékeztetünk rá, hogy $H_p = L_p$, ha $1 < p < \infty$. Ebből interpolációval következik, hogy σ_*^θ gyengén $(1, 1)$ típusú, ami a $\sigma_n^\theta f$ θ-közepek majdnem mindenütt való konvergenciáját biztosítja. Ez a majdnem mindenütt való konvergencia bizonyítására egy új módszer kidolgozását is jelenti. Azt is igazoltam, hogy egy kúpszerű halmazon egy integrálható függvény θ-közepei pontosan akkor konvergálnak minden Lebesgue pontban, ha θ egy Herz térben van. Ezt a tételt kiterjesztettem Wiener amalgám terekre is, valamint Fourier transformáltakra is.

Általános többváltozós összegzéseket vizsgálva elégséges feltételt adtam θ-ra, hogy konvergenciát illetve egyenlőtlenségeket nyerjünk Wiener amalgám és Hardy terekben. Itt a Gábor analízisben használatos Wiener amalgám terek mellett a modulációs tereket is alkalmaztam a szummációelméletben. Ha θ például eleme a Feichtinger algebrának vagy egy súlyozott modulációs térnek, akkor σ_*^θ korlátos H_1-ből L_1-be. Ezt az egyenlőtlenséget is kiterjesztettem $p < 1$-re. Megvizsgáltam a Lebesgue pontok fogalmát illetve ezekben a pontokban az összegzések konvergenciáját többváltozós függvényekre és általánosítottam a tételeket Walsh-Lebesgue pontokra. Ez utóbbi általánosítás lényeges új ötleteket és definíciókat is követelt. Goginava grúz professzorral általánosítottuk a Lebesgue pontok fogalmát többváltozós Walsh-Fourier sorok Marcinkiewicz összegzésére, így nyertük a Marcinkiewicz-Lebesgue pontokat. Igazoltuk, hogy az összegzés minden Marcinkiewicz-Lebesgue pontban konvergens.

Schipp Ferenccel a Fourier sorok θ-összegzésének diszkrét változatát vizsgáltuk több dimenzióban is. Folytonos függvényekre a diszkrét részletösszegek egyenletesen konvergálnak az eredeti függvényhez. Továbbá approximációelméleti eredményeket is kaptunk, pl. a Jackson polinomok egyenletes konvergenciáját. Szili Lászlóval súlyozott Jacobi-Fourier sorokra igazoltunk egyenletes konvergenciát.

Jelentős hozzájárulásként az előbb említett lokális Hardy tereket a szummációelméletben is alkalmaztam. Mivel a lokális Hardy terek más atomokkal (is) rendelkeznek, mint a klasszikus Hardy terek, ezért a bizonyítások is nehezebbek. Az önmagukban is érdekes egyenlőtlenségek mellett a Fourier transzformáltakra vonatkozó összegzések majdnem mindenütt való konvergenciáját integrálható függvényekről kiterjesztettem Wiener amalgám térbeli függvényekre.

Végezetül foglalkoztam a két- és többváltozós trigonometrikus Fourier sorok úgynevezett háromszög összegzéseivel is (külön kellett vizsgálni ezt a két esetet). Mivel itt a magfüggvények nagyon bonyolultak, ezért ezt az összegzést kevesebben vizsgálták. A Fourier sorok háromszög részletösszegét az

$$s_k f(x) := \sum_{j \in \mathbb{Z}^d, |j| \le k} \hat{f}(j) e^{\imath j \cdot x}$$

formulával definiáljuk, ahol $|\cdot|$ az egyes normát jelöli, azaz $|j| := j_1 + \ldots + j_d$. Ha csak az első síknegyedet tekintjük, akkor valóban egy háromszögben adjuk össze az elemeket. Ezekre a részletösszegekre egyébként sok egyváltozós tétel igaz marad, például a Carleson tétel is teljesül. A θ-közepeket a

$$\sigma_n^\theta f(x) := \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} \theta\Big(\frac{|j|}{n}\Big) \hat{f}(j) e^{\imath j \cdot x}$$

képlettel vezetjük be, ahol most θ egyváltozós függvény. A θ-ra vonatkozó bizonyos feltételek mellett igazoltam, hogy σ_*^θ korlátos H_p-ből L_p-be és gyengén $(1,1)$ típusú. Ebből következően a θ-közepek majdnem mindenütt konvergálnak a függvényhez, ha a függvény integrálható. Fourier transzformáltakra hasonló tételek igazak.

September 5, 2011

Dr. Weisz Ferenc
egyetemi tanár

PUBLIKÁCIÓJEGYZÉK

Referált tudományos folyóiratokban megjelent dolgozatok

[1] Weisz, F.: Some convergence theorems for Gabor series. Pure Mathematics and Applications 17, 539-553 (2006)

[2] Weisz, F.: Inversion of the short-time Fourier transform using Riemannian sums. J. Fourier Anal. Appl. 13, 357-368 (2007)

[3] Weisz, F.: Multiplier theorems for the short-time Fourier transform. Integr. Equ. Oper. Theory. 60, 133-149 (2008)

[4] Weisz, F.: Strong θ-summability of multi-dimensional Fourier transforms. Acta Sci. Math. (Szeged) 74, 207-228 (2008)

[5] Weisz, F.: Strong Marcinkiewicz summability of multi-dimensional Fourier series. Annales. Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp. 29, 297-317 (2008)

[6] Weisz, F.: Herz spaces and restricted summability of Fourier transforms and Fourier series. J. Math. Anal. Appl. 344, 42-54 (2008)

[7] Weisz, F.: Wiener amalgams, Hardy spaces and summability of Fourier series. Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 145, 419-442 (2008)

[8] Weisz, F.: Walsh-Lebesgue points of multi-dimensional functions. Anal. Math. 34, 307-324 (2008)

[9] F. Schipp and F. Weisz: Multi-dimensional discrete summability. Acta Sci. Math. (Szeged) 75, 197-217 (2009)

[10] F. Weisz: Restricted summability of Fourier series and Hardy spaces. Acta Sci. Math. (Szeged) 75, 219-231 (2009)

[11] F. Weisz: Gabor analysis and Hardy spaces. East J. Appr. 15, 1-24 (2009)

[12] F. Weisz: Pointwise summability of Gabor expansions. J. Fourier Anal. Appl. 15, 463-487 (2009)

[13] F. Weisz: Multi-dimensional Fejér summability and local Hardy spaces. Studia Math. 194, 181-195 (2009)

[14] F. Weisz: Fejér summability and local Hardy spaces. Acta Sci. Math. (Szeged) 75, 605-615 (2009)

[15] F. Weisz: Inequalities in summability theory of Fourier series. J. Math. Inequal. 3, 357-368 (2009)

[16] F. Weisz: Local Hardy spaces and summability of Fourier transforms. J. Math. Anal. Appl. 362, 275-285 (2010)

[17] L. Szili and F. Weisz: On weighted uniform Cesàro summability of Jacobi-Fourier series. Acta Math. Hungar. 127, 112-138 (2010)

[18] F. Weisz: Restricted summability of Fourier transforms and local Hardy spaces. Acta Math. Sin. (Engl. Ser.) 26, 1627-1640 (2010)

[19] F. Weisz: Summation of Fourier series with respect to Walsh-like systems and the dyadic derivative. Ann. Univ. Sci. Budapest. Sect. Comput. 33, 377-404 (2010)

[20] F. Weisz: ℓ_1-summability of higher-dimensional Fourier series. J. Approx. Theory 163, 99-116 (2011)

[21] F. Weisz: Summability of Gabor expansions and Hardy spaces. Appl. Comput. Harmon. Anal. 30, 288-306 (2011)

[22] F. Weisz: Triangular Cesàro summability of two-dimensional Fourier series. Acta Math. Hungar. 132, 27-41 (2011)

[23] F. Weisz: Applications of multi-parameter martingales in Fourier analysis. Stochastics and Dynamics. 11, 551-568 (2011)

[24] F. Weisz: ℓ_1-summability of d-dimensional Fourier transforms. Constr. Approx. (to appear) 2009.12.06., 2010.01.21. 2010.07.22.

[25] U. Goginava and F. Weisz: Pointwise convergence of Marcinkiewicz-Fejér means of two-dimensional Walsh-Fourier series. Studia Sci. Math. Hungar. (to appear)

[26] F. Weisz: Some footprints of Marcinkiewicz in summability theory. Banach Center Publications, Józef Marcinkiewicz Centenary Volume, Vol. ??, 2011, ???-??? (to appear)

[27] F. Weisz: Triangular summability of two-dimensional Fourier transforms. Anal. Math. (to appear)

Nemzetközi konferencia kiadványok

[28] F. Weisz: Summability of Walsh-Fourier series and the dyadic derivative. Chapter 9, in Walsh and Dyadic Analysis, Proceedings of the Workshop October 18-19, 2007, Nis, Serbia, 109-135, ISBN 978-86-85195-47-1, Publisher Elektronski fakultet, Nis.

[29] F. Weisz: Lebesgue points of multi-dimensional functions. Proceedings of the workshop Discrete Analysis and Applications, Facta Universitatis, Nis, Ser.: Elec. Energ. 21, 2008, 255-265

Előadások

[30] Some summability results for Gabor series. Trends in Harmonic Analysis, Strobl, 2007

[31] Summability of Walsh-Fourier series and the dyadic derivative. Workshop on Walsh and Dyadic Analysis, Nis, Serbia, 2007

[32] Inequalities in Summability Theory of Fourier Series. Mathematical Inequalities and Applications, Trogir - Split, Croatia, 2008

[33] Lebesgue points of multi-dimensional functions. Discrete Analysis and Applications, Thessaloniki, Greece, 2008

[34] Összegzések és lokális Hardy terek. Sorok, függvények, véletlen vátozók, operátorok. Szeged, 2009

[35] Summation of Fourier series with respect to Walsh-like systems and the dyadic derivative. Workshop on Dyadic Analysis. Dobogókő, 2009

[36] Gabor expansions and local Hardy spaces. Conference on Time-Frequency, Strobl, Austria, 2009

[37] Some footprints of Marcinkiewicz in summability theory. The Józef Marcinkiewicz Centenary Conference, Poznań (Poland), 2010.

[38] Triangular and cubic summability of Fourier series. Harmonic Analysis and Orthogonal Systems IV, Bedlewo (Poland), 2010.

[39] Applications of multi-parameter martingales in Fourier analysis. IMPACT-Workshop in honour of Peter Imkeller's 60th birthday, Berlin, (Germany), 2011.