Differenciálrendszerek geometriai alkalmazása

Projekt záró beszámoló

A "Differenciálrendszerek geometriai alkalmazása" című pályázatunkban három területet jelöltünk meg, ahol eredményeket kívántunk elérni. Ez a három terület a

1. variációszámítás inverz problémája,
2. transzformációcsoportokkal szemben invariáns struktúrák vizsgálata,
3. szövetgeometriai kutatások.

Pályázat által támogatott időszak alatt mindhárom területen sikerült érdekes eredményeket elérnünk. Ezen eredmények egy részét már több cikkben publikátuk, és tervezzük e témákban további publikációk megjeletetését.

1 A variációszámítás inverz problémája

Ez egy igen régi, klasszikus probléma, melynek során a cél az, hogy karakterizáljuk az olyan közönséges másodrendű differenciál-egyenletrendszereket, melyek reguláris variációs probléma extremálisaiként származtathatóak. Ebből a szempontból különösen fontos az olyan struktúrák vizsgálata (például asszociált konnexió, görbületi mennyiségek), melyek speciális tulajdonságaiból direkt információ származtatható a struktúra metrizálhatóságára, illetve a variációs elvből való származtathatóságra. Az egyik legfontosabb ilyen struktúra a konnexió és a párhuzamos eltolás, illetve az ezekhez kapcsolható algebrai struktúra, a holonómiacsoport. A Finsler sokaságok holonómia csoportjára illetve e csoportot érintő algebrának tulajdonságaira vonatkozó eredményeinket a [1], [2] és [3] cikkek tartalmazzák. A metrizálhatósági és projektív metrizálhatósági vizsgálatok adják a variációszámítás inverz problémája témakörében kutatásaink másik kiemelt területét. Ezen területen az eredményeinket a [4], [5] és [6] cikkek tartalmazzák.

1.1 Finsler sokaságok holonómia struktúrája

A Finsler sokaságok holonómia csoportjának illetve a holonómia csoportot érintő algebrának vizsgálata az egyik terület, ahol sikerült új, véleményünk szerint értékes eredményeket elérnünk. Az E. Cartan által bevezetett holonómia csoport (azaz az egy rögzített pontból kiinduló hurkok menti párhuzamos eltolások alkotta csoport) a Riemann geometriai kutatások egy igen hatékony eszközévé vált. A párhuzamos eltolások alatt természetesen a sokaság kanonikus (lineáris és metrikus) konnexiójára vonatkozó párhuzamos eltolásokat értünk. A Riemann sokaságok általánosításaként kaphatjuk a Finsler sokaságokat, melyekben a metrikus tenzor komponensei nemcsak a helytől, hanem az iránytól is függhetnek. A holonómia csoport fogalmát természetes módon lehet általánosítani Finsler sokaságok esetére is: a Finsler tér holonómia csoportja a kanonikus (általában nem lineáris és nem is metrikus) konnexiójára vonatkozó, egy pontból kiinduló hurkok menti párhuzamos eltolások alkotta csoport.

[1] ***Finsler manifolds with non-Riemannian holonomy,*** Muzsnay Z., Nagy P.T.

Finsler sokaságok holonómia struktúrájára vonatkozó korábbi kutatások eredményeképpen csak igen speciális esetekben sikerült nem-Riemann típusú Finsler sokaság holonómia

csoportját leírni. Ilyen a Berwald terek esete (itt a kanonikus konnexió lineáris), ahol a holonómia csoporthoz található olyan Riemann metrika, aminek a holonómia csoportja megegyezik a Finsler sokaság holonómia csoportjával, illetve a Landsberg terek esete (itt a kanonikus konnexió metrikus), ahol a holonómia csoport az indikátrixon indukált Riemann metrika izometriáinak kompakt (véges dimenziós) Lie csoportja. Kutatásainkat nagyban motiválta az S.S. Chern és Z. Shen által feltett kérdés: " *Vajon létezik-e olyan Finsler tér, aminek holonómia csoportja egyetlen Riemann tér holonómia csoportjával sem egyezik meg*?" /Riemann-Finsler geometry, Nankai Tracts in Mathematics 6, World Scientific, 2005, p.85./ Cikkünkben megmutatjuk, hogy Finsler sokaságok holonómia tulajdonságai nagyon eltérhetnek a Riemann terek holonómia tulajdonságaitól. Bebizonyítjuk, hogy amennyiben egy konstans görbületű, n-dimenziós ($n>2$) nem-Riemann Finsler tér holonómia csoportja véges dimenziós Lie csoport, akkor annak dimenziója nagyobb, mint az n-dimenziós téren ható ortogonális csoport dimenziója, és így nem lehet kompakt Lie csoport. A holonómia csoport dimenziójára becslést az indikátrixon – mint $n-1$ dimenziós sokaságon – a görbületi vektormezők által algebrailag generált Lie algebra, az úgynevezett görbületi algebra vizsgálatával kaptunk. Cikkünkben megmutatjuk, hogy a görbületi algebra valamennyi eleméhez van a holonómia csoport elemeiből álló diffeomorfizmusoknak olyan 1-paraméteres családja, aminek deriváltja éppen a görbületi algebra adott eleme. Bebizonyítjuk, hogy egy konstans (nem nulla) görbületű nem-Riemann típusú Finsler sokaság esetén konstruálható $n(n-1)/2$ lineárisan független görbületi vektormező. Ennek következményeként adódik, hogy a fenti feltételek mellett a holonómia csoport – a Riemann esettel ellentétben – nem lehet egy kompakt Lie csoport, azaz:
Tétel: Egy n-dimenziós ($n>2$) konstans (nem nulla) görbületű (M,F) Finsler sokaság holonómia csoportja pontosan akkor kompakt Lie csoport, ha (M,F) egy Riemann sokaság.
Ennek a tételnek következményként adódik, hogy S.S. Chern-nek és Z. Shen-nek a Finsler terek holonómiájára vonatkozó kérdésére pozitív választ tudunk adni, hiszen egy konstans (nem nulla) görbületű n-dimenziós ($n > 2$) nem-Riemann Finsler sokaság holonómia csoportja egyetlen Riemann sokaság holonómia csoportjával sem egyezhet meg.

[**2**] ***Infinitesimal holonomy algebra of a Finsler space***, Muzsnay Z., Nagy P.T.
A Finsler terek konnexióelméletnek igen jelentős szakirodalma van, ugyanakkor a holonómia csoportjáról kevés információ ismert. A probléma nehézségét az adja, hogy a holonómia csoport nem-lineáris konnexiók esetén általában végtelen dimenziós topologikus csoport, aminek a differenciálható struktúrája – és így az esetlegesen hozzá asszociált Lie algebrája (a holonómia algebra) – nem ismert. Ennek ellenére a csoporthoz asszociált érintő Lie algebra fogalmának bevezetésével sikerült fontos, a holonómia csoportra vonatkozó érdekes információkhoz jutni. Dolgozatunkban bevezetjük a Finsler terek *infinitézimális holonómia algebrá*jának fogalmát, ami a Riemann terek megfelelő fogalmának az általánosítása. Az infinitézimális holonómia algebra egy rögzített pont esetén a ponthoz tartozó indikatrix vektormezőinek az a legszűkebb Lie részalgebrája, mely tartalmazza a görbületi vektormezőket, illetve a görbületi vektormezők horizontális liftek szerinti kovariáns deriváltjait a tangens téren származtatott lineáris (Berwald) konnexióra vonatkozólag. Megmutatjuk, hogy az infinitézimális holonómia algebra elemei érintik a pont holonómia csoportját. Mivel a görbületi algebra csak egy rész Lie algebrája az infinitézimális holonómia algebrának, az érintési tulajdonság alapján a holonómia csoport struktúrájára vonatkozólag több információhoz juthatunk ez utóbbi

felhasználásával. Explicit példát adtunk olyan esetekre, ahol a görbületi algebra szigorú részalgebrája a infinitézimális holonómia algebrának. Ezek közül is külön megemlítendő az a speciális eset, ahol a görbületi algebra véges, míg az infinitézimális holonómia algebra végtelen dimenziós Lie algebra. Ebben az esetben, a holonómia algebra érintő tulajdonsága miatt, a véges dimenziós görbületi algebra ellenére sem lehet a holonómia csoport egy véges dimenziós Lie csoport. Cikkünkben karakterizáltunk véges, illetve végtelen dimenziós holonómia csoporttal rendelkező Finsler tereket.

[3] ***Finsler spaces with infinite dimensional holonomy group***,
Muzsnay Z., Nagy P.T.

Bár az [1] dolgozatban sikerült rámutatni, hogy a Finsler terek holonómia tulajdonságai nagyon eltérhetnek a Riemann terek holonómia tulajdonságaitól, továbbá [2]-ben sikerült bebizonyítanunk, hogy a Riemann terekkel ellentétben léteznek végtelen dimenziós holonómia csoporttal rendelkező Finsler terek, ilyen végtelen dimenziós holonómia csoport leírása nehéz problémának mutatkozott. A szakirodalomban nem is található erre vonatkozó eredmény. Ezért is tartjuk kiemelkedően fontosnak cikkünk azon eredményét, melyben sikerült egy – egyébként jól ismert Finsler tér, az ún. Funk tér – holonómia csoportjára vonatkozó eredményt kapnunk. Bebizonyítottuk, hogy annak ellenére, hogy ez egy viszonylag egyszerű struktúrájú Finsler tér (konstans görbületű, melynek a geodetikusai egyenesek), az infinitézimális holonómia algebrája végtelen dimenziós, és tartalmazza az egységkörön (mint indikátrixon) a véges Fourier sorokkal definiált vektormezők által lineárisan generált valós Witt algebrát. Így az egységkör diffeomorfizmus csoportjára vonatkozó eredmények felhasználásával igazoltuk az alábbi tételt:
Tétel: A Funk tér holonómia csoportjának topológikus lezártja a kör diffeomorfizmus csoportjának az egységet tartalmazó összefüggő komponense $(\mathsf{Diff}^{\infty}_{+} S^1)$, *azaz a kör irányítástartó diffeomorfizmusainak részcsoportja.*

1.2 Metrizálhatósági és projektív metrizálhatósági vizsgálatok

A metrizálhatósági vizsgálatok során a cél az, hogy karakterizáljuk az olyan közönséges másodrendű differenciál-egyenletrendszereket, melyek Riemann, vagy általánosabban Finsler tér geodetikusaiként származtathatóak. Ennek a problémának egy természetes általánosítása a projektív metrizálhatóság vizsgálata, ahol a kérdés az, hogy vajon átparaméterezhető-e az adott görbesereg úgy, hogy az új parametrizációval már metrikából származtatható legyen. Ennek a kérdésnek a fontosságát mutatja az a tény is, hogy David Hilbert "Matematikai problémák" címmel tartott előadásában is szerepel ez a probléma abban a speciális esetben, mikor a kérdéses görbesereg egyenesek serege (4. probléma: a projektív metrikák meghatározása).

[4] ***Projective metrizability problem and formal integrability***,
Muzsnay Z., Bucataru I.

Dolgozatunkban a Lagrange mechanika oldaláról közelítjük meg a projektív metrizálhatóság problémáját. Felhasználjuk I. Bucataru és M.F. Dahl eredményét, mely egy szemibázikus 1-forma létezésére vezeti vissza a problémát. Ezen 1-formára vonatkozó parciális differenciál-egyenletrendszer vizsgálatával megmutatjuk, hogy az integrálhatósági feltétel megadható az indukált nemlineáris konnexió görbületével. A görbület függvényében számos projektív metrizálható görbeseregosztályt kapunk. Speciális esetként adódik, hogy 2-dimenziós térben minden homogén másodrendű differenciál-egyenletrendszer projektív metrizálható. Explicit példát adunk olyan másodrendű differenciál-egyenletrendszerre, mely maga nem metrizálható, de projektív metrizálható.

[5] ***Projective and Finsler metrizability for sprays: parameterization-rigidity of the geodesics***, Muzsnay Z., Bucataru I.

Egy közönséges másodrendű autonóm differenciál-egyenletrendszernek megfeleltethető egy speciális vektormező, úgynevezett spray. Amennyiben két másodrendű differenciál-egyenletrendszer megoldásgörbéi egymásba átparaméterezhető görbesereget alkotnak, akkor a megfelelő S és $\widetilde{S}$ sprayk projektív ekvivalensek, azaz van olyan 1-homogén függvény, amire $\widetilde{S} = S + P\mathcal{C}$, ahol $\mathcal{C}$ a Liouville vektormező. Egy (M, F) Finsler tér geodetikus S sprayjének a lehető legtermészetesebb projektív deformáltja az az $\widetilde{S}$ spray, ahol a P függvény az F alapfüggvény konstansszorosa, azaz $\widetilde{S}_\lambda = S + \lambda F\mathcal{C}$. A holonómia disztribúció vizsgálatával megmutatjuk, hogy a projektív deformált $\widetilde{S}_\lambda$ spray legfeljebb végessok $\lambda \in \mathbb{R}$ paraméterértékre lehet Finsler metrizálható. Ez azt mutatja, hogy a metrizálhatósági tulajdonság bizonyos értelemben merev: a Finsler metrizálható sprayk fentebb leírt kis deformálciójával előálló sprayt nem lehet Finsler metrikából származtatni.

2 Transzformációcsoportokkal szemben invariáns struktúrák vizsgálata

A transzformációcsoportokkal szemben invariáns struktúrák vizsgálata során kapott újabb eredményeket az [1], [6] és [8] dolgozatok tartalmazzák.

[1] ***Finsler manifolds with non-Riemannian holonomy,*** Muzsnay Z., Nagy P.T.

Ebben a dolgozatban – a szakirodalomban elsőként – a Heisenberg csoporton egy Berwald-Moór típusú invariáns metrika segítségével sikerül egy olyan szinguláris Finsler struktúrát konstruáltunk, mely a sokaság minden pontjában egy-egy végtelen dimenziós görbületi algebrát származtat. Ennek következtében ezen tér holonómia csoportja sem lehet véges dimenziós. Ezzel az explicit példával is bizonyítjuk, hogy a Riemann illetve nem-Riemann típusú Finsler sokaságok holonómia struktúrái egymástól nagyon eltérőek lehetnek.

[6] ***Finsler metrics on Lie groups***, Muzsnay Z., Thompson G.

Lie csoportok esetén kanonikus módon vezethető be egy invariáns, torziómentes konnexió, melynek geodetikusai éppen a csoport egyparaméteres részcsoportjai, illetve azok baleltolással kapott képei. A várakozással ellentétben nem igaz, hogy ez mindig metrikából lenne származtatható. G. Thompson, R. Ghanam és F. Hindeleh (USA) a "Bi-invariant and non-invariant metrics on Lie groups" című 2006-ban megjelent cikkében L. Eisenhartnak Riemann metrizálhatóságra vonatkozó eredményét felhasználva vizsgálta a legfeljebb 6-dimenziós feloldható Lie csoportokat. Ezen kutatáshoz kapcsolódva, Finsler metrizálhatóságra vonatkozó saját korábbi eredményeink felhasználásával vizsgáljuk a Lie csoportok kanonikus konnexiójának Finsler struktúrából való származtathatóságát. A holonómia algebra kiszámítása után megmutatjuk, hogy a metrizálhatóság szükséges és elegendőségi feltétele megadható a csoporthoz tartozó Lie algebrán. A talált feltételt alkalmazva megmutatható, hogy a 6-dimenziós Lie algebrák P. Turkowski-féle klasszifikációjában A.6.82, A.6.83, A.6.89 és A.6.93 jelöléssel ellátott Lie-algebrákhoz tartozó csoportok esetén Thompsonék klasszifikációja nem helyes.

[7] ***Bruck decomposition for endomorphisms of quasigroups,***
Nagy, P.T., Plaumann, P.

Jólismert, hogy a szimmetrikus és reduktív homogén Riemann terek tükrözései egy speciális szerkezetű, azonosságokkal definiált lokális kvázicsoportot alkotnak. Természetes feladatnak tűnik a megfelelő kvázicsoport osztályának algebrai vizsgálata, amely kvázicsoport osztályok a fenti differenciálgeometriai struktúrák algebrai modelljeinek tekinthetők. Ez a feladat vezetett el az u.n. LF-kvázicsoportok algebrai varietásának tanulmányozásához, amely kvázicsoport osztáyt L. C. Murdoch vezette be 1939-ben és amelyet a 90-es években Lev Sabinin alkalmazott az u.n. transz-szimmetrikus terek vizsgálatára. Ebben a dolgozatban R. H. Bruck által 1944-ben megfogalmazott nagyon általános kvázicsoport bővítési módszert alkalmazunk speciális szerkezetű LF-kvázicsoportok vizsgálatára. Ezt a kvázicsoport osztályt az jellemzi, hogy az $e(x) = x\backslash x$ bal-deviációs leképezés endomorfizmus, illetve ennek speciális esete az, amikor az $e(x)$ leképezés képe csoport. Egy karakterizációs tételt fogalmazunk ezekre a klasszikus kvázicsoportokra, amely lehetőséget nyújt a fenti tulajdonságú kvázicsoportok csoportelméleti konstrukciójára.

[8] ***Totally geodesic subalgebras in nilpotent metric Lie algebras,***
Nagy P.T., Homolya Sz.

Egy Riemann sokaságot nilsokaságnek hívunk, ha létezik tranzitív nilpotens izometria csoportja. A Riemann-féle nilsokaságok lokálisan azonosíthatók a nilpotens Lie csoportok balinvariáns Riemann metrikáival. Ezen sokaságok geometriája vizsgálható az infinitézimális Lie algebrai modelljükben, nevezetesen a nilpotens metrikus Lie algebrák tanulmányozásával. Ezen Riemann terek geodetikusait vizsgálva megmutatjuk, hogy a kétdimenziós totálisan geodetikus részsokaságok létezése szoros kapcsolatban áll a kétlépcsős nilsokaság szingularitási tulajdonságával. Nevezetesen, nemszinguláris esetben csak centrális és a centrumra merőleges totálisan geodetikus felületek létezhetnek. Szinguláris esetben a totálgeodetikus felületek struktúrája gazdagabb. 5-dimenziós kétlépcsős nilsokaságok osztályozását felhasználva (Homolya, Szilvia; Kowalski, Oldrich: Simply connected two-step homogeneous nilmanifolds of dimension 5) részletesen leírjuk a totálisan geodetikus felületek szerkezetét.

3 Szövetgeometriai eredmények

Szövetgeometriai eredmények egyrészt a 3-szövetek linearizálhatóságára, másrészt a szövetek bővítéselméletének a kidolgozására vonatkoznak. A szövetek bővítéselmélete arról szól, hogy amennyiben értelmezhető szövetek homomorfizmusa és leírhatók az azok magjaként és faktoraként szereplő szövetgeometriák, akkor hogyan lehet két adott szövetgeometriából egy olyan geometriát konstruálni, amelynek homomorf képe és a homomorfiához tartozó magja az adott szövetgeometriákkal izomorf. A szövetek bővítéselméletének kidolgozása a pályázat keretében az algebraizált változatban történt meg. A szövetek lokálisan koordinátázhatók loopokkal, amik a csoportok nemasszociatív általánosításai. A linearizálhatóságra vonatkozó eredményt a [9] dolgozat tartalmazza, a loopok Schreier-féle bővítéselméletének alapjai a [10] dolgozatban vannak lefektetve, a [11] dolgozat pedig egy speciális bővítés típus vizsgálatát tartalmazza.

[9] ***On the problem of linearizability of a 3-web,*** Muzsnay Z.

A 3-szövetek linearizálhatóságára vonatkozóan sikerült új, érdekes eredményeket elérnünk. Ez különösen fontos volt számunkra, mert a 3-szövetek linearizálhatóságára vonatkozó korábbi eredményeinket két neves orosz matematikus V.V. Goldberg és V.V. Lychagin több cikkében is támadta. Az általuk felhozott példa egy 3-szövet, mely a mi eredményeink szerint linearizálhatónak, míg Goldbergék eredményei szerint nem linearizálhatónak kell lennie. Cikkünkben a kérdéses szövet linearizálhatóságának vizsgálata során azt kaptuk, hogy – ellentétben az ő állításukkal – ez a szövet linearizálható. Ezt az állítást nemcsak az egzisztenciát bizonyító számolással sikerült igazolnom, hanem a kérdéses 3-szövetet linearizáló konkrét diffeomorfizmus explicit megadásával is. A cikkben közölt eredményt azóta J.P. Dufour francia matematikus (Université Montpellier II.) is megerősítette azzal, hogy megadta a 3-szövetet linearizáló koordinátázást.

[10] ***Schreier loops,*** Nagy P., Strambach K.

A cikk a csoportokra vonatkozó Schreier-féle bővítéselmélet egy loopokra vonatkozó természetes általánosítását vizsgálja. A csoportstruktúrából kiindulva a csoportbővítéshez hasonlóan természetes módon be lehet vezetni a loop-bővítés fogalmát, aminek segítségével a csoportokra vonatkozó Schreier-féle bővítéselmélet általánosítását kapjuk. Ennek a konstrukciónak a segítségével a klasszikus és fontos loop-osztályok mindegyikére lehet szemléletes példát konstruálni.

[11] ***Right nuclei of quasigroup extensions,*** Nagy P.T., Stuhl I.

A kvázicsoportok és loopok elméletében a minden elemmel (balról, jobbról vagy középről) asszociáló elemekből álló részcsoportot bal, jobb vagy közép nukleusznak nevezik. Ennek a részcsoportnak a mérete alkalmas a kvázicsoport asszociativitáshoz való közelségének mérésére. A dolgozatban jobb egységelemmel rendelkező kvázicsoportok jobboldali nukleuszát tanulmányozzuk. Vizsgáljuk a kvázicsoportok Schreier-típusú bővítéseinek elméletét. A dolgozat fő eredményekében jellemezzük az olyan jobb nukleáris kvázicsoport bővítéseket, amelyek rendelkeznek a jobboldali inverz tulajdonsággal.

References

[1] Z. Muzsnay, P. T. Nagy, *Finsler manifolds with non-Riemannian holonomy,* accepted by Houston J. Math.

[2] Z. Muzsnay, P. T. Nagy, *Infinitesimal holonomy algebra of a Finsler space,* accepted by Communications in Mathematics (Ostrava)

[3] Z. Muzsnay, P. T. Nagy, *Finsler spaces with infinite dimensional holonomy group,* preprint 2011

[4] Muzsnay Z; Bucataru I: *Projective metrizability problem and formal integrability,* preprint, 2010

[5] Muzsnay Z; Bucataru I: *Projective and Finsler metrizability for sprays: parameterization-rigidity of the geodesics,* preprint, 2011

[6] Muzsnay Z; Thompson G: *Finsler metrics on Lie groups,* preprint, 2009

[7] Nagy, P.T., Plaumann, P.: *Bruck decomposition for endomorphisms of quasigroups*, J. Gen. Lie Theory Appl. 3 no. 3, 191–196., 2009

[8] Nagy P.T.; Homolya Sz.: *Totally geodesic subalgebras in nilpotent metric Lie algebras*, preprint, 2011

[9] Muzsnay Z.: *On the problem of linearizability of a 3-web,* Nonlinear Analysis, vol. 68, (6), 2008, pp. 1595-1602

[10] Nagy P.; Strambach K.: *Schreier loops,* Czechoslovak Mathematical Journal, 58 (133) 2008, 759-786

[11] Nagy P.T., Stuhl I.: *Right nuclei of quasigroup extensions* preprint, 2010