OTKA-PF-64061 részletes zárójelentés

Az alábbi jelentés a "Közlemények" alatt felsorolt publikációk eredményeinek rövid összefoglalóját tartalmazza. Itt jegyzem meg, hogy néhány 2006-os megjelenésű publikáción még a korábbi OTKA-F049457 támogatása van feltüntetve (de annak zárójelentésében nem szerepeltettem őket, mivel akkor még elfogadás előtt álltak).

A kutatás nagyrészt a munkatervben megadott irányokban és időarányosan haladt. Eltérésként említem meg, hogy az utolsó évben a parkettázásokkal kapcsolatos problémák és eredmények a figyelmemet összeghalmazok egyéb struktúrális kérdéseire irányították, ami nem szerepelt az eredeti munkatervben. Megjegyzem, hogy az ilyen irányú kutatásaimat a jövőben is folytatni szeretném. Eltérés továbbá, hogy a Trotter-formula konvergenciájával kapcsolatban sajnos nem sikerült a kívánt áttörést elérnem.

Az eredmények összefoglalása témakörök és publikációk szerinti lebontásban:

*Fourier analízis*sel kapcsolatos problémák:

M. N. Kolountzakis, M. Matolcsi: *Tiles with no spectra*, Forum Math., 18 (2006), 519-528.
Ebben a cikkben megcáfoltuk a Fuglede sejtés még nyitott irányát, azaz olyan parkettázó halmazt találtunk ($\mathbb{R}^5$-ben), amely nem spektrális (a másik irányt T. Tao korábban cáfolta). A sejtés 30 évig nyitott volt és korábban sok speciális esete bizonyítást nyert. A megoldás egy dualitási érvelésen és a fellépő parkettázó halmazok indikátor függvényének a Fourier-transzformáltjának zéró-halmaza elemzésén alapult.

M. N. Kolountzakis, M. Matolcsi: *Complex Hadamard matrices and the spectral set conjecture*, Collectanea Mathematica, (2006), Vol. Extra, 281-291.

Itt T. Tao 5 dimenziós példáján javítva, egy korábbi ötletemet kihasználva komplex Hadamard mátrixokról, már $\mathbb{R}^3$-ban sikerült spektrális, de nem parkettázó halmazt találni.

B. Farkas, M. Matolcsi, P. Móra: *On Fuglede's conjecture and the existence of universal spectra*, J. Fourier Anal. Appl., Volume 12, Number 5, (2006), 483-494.
Megmutattuk, hogy a Fuglede sejtés "parkettáz $\Rightarrow$ spektrális" iránya minden dimenzióban ekvivalens az univerzális spektrum sejtéssel, és ennek segítségével sikerült 3 dimenziós parkettázó de nem spektrális halmazt találni. Megjegyzem, hogy ezzel *a sejtés mindkét irányára van 3-dimenziós ellenpélda, azonban a sejtés mindkét iránya továbbra is nyitott 1 és 2 dimenzióban.* Itt valószínűleg lényegesen új ötletekre lenne szükség. További kutatásaink részeredményei alapján hajlok arra, hogy a sejtés 1-dimenzióban igaz.

M. N. Kolountzakis, M. Matolcsi: *Algorithms for translational tiling*, (közlésre beküldve), 2009.
Témájában az előzőekhez tartozik ez a cikk is, amelyben a diszkrét Fourier transzformált lehetséges zéró-halmazának elemzésével egy hatékony algoritmust adtunk ciklikus csoportokban az összes nem-periodikus parkettázás megkeresésére. Ennek motivációja, hogy kortárs zeneszerzők az ilyen parkettázásokat valóban felhasználják, ahogy erre az IRCAM kutatói erre rávilágítottak (ők vetették fel a kérdést, hogy lehet-e ilyen algoritmust találni). Lásd pl. http://recherche.ircam.fr/equipes/repmus/mamux/MusiqueVuza.html, Fabien Lévy: Coincidences (1999), pour grand ensemble de 33 musiciens [2.1.2.1, sax - 2.2.2.1 - 2 perc., accordéon, harpe, piano - 6.0.4.4.2], [Editions Billaudot, env. 11']. Nouvelle version, Tokyo Symphony Orchestra, Dir.: Kazuyoshi Akiyama, 05/09/2007, Suntory Hall, Tokyo, Japan.

A. Iosevich, M. N. Kolountzakis, M. Matolcsi: *Covering the plane by rotations of a lattice arrangement of disks*, Complex and Harmonic Analysis,

Proceedings of the Conference, Thessaloniki, May 25-27, 2006, Destech Publ. Inc., 2007 (eds:A. Carbery, P. Duren, D. Khavison, A. Siskakis).
Fourier analízissel vizsgáltuk, hogy egy rácspontok köré vont kis körökből álló halmaz milyen elforgatottjainak uniója fedi le (majdnem) az egész síkot, (azaz legfeljebb egy origo körüli hézagot kivéve). Ezt a kérdést Révész Szilárd egy általánosabb kérdése motiválta, amelyre a válasz az itteni eredmények ismeretében negatív lett.

P. Jaming, M. Matolcsi, Sz. Révész: *On the extremal rays of the cone of positive, positive definite functions*, J.Fourier Anal. Appl. (megjelenes alatt), 2009
A pozitív és pozitív definit függvények kúpjának extremálisait vizsgáltuk. Megmutattuk, hogy nem csak Gauss-féle extremálisok léteznek, valamint rámutattunk, hogy az irodalomban ismert számos integrál-reprezentációs előállítás nem más mint megfelelő extremális élek szerinti Choquet-felbontás.

Matematikai fizika által motivált kutatások:

M. Matolcsi, J. Réffy, F. Szöllősi: *Constructions of Complex Hadamard matrices via tiling Abelian groups*, Open Systems & Information Dynamics, 14, (2007) 247-263.
Egy korábbról már ismert parkettázási konstrukcióról megmutattuk, hogy az analogonja spektrális halmazokra is működik, majd a létrejövő spektrális halmazokhoz asszociált komplex Hadamard mátrixokról megmutattuk, hogy azok újak, azaz még nem szerepelnek a nemrégiben Tadej és Zyczkowski által megjelentetett katalógusban.

M. Matolcsi, F. Szöllősi: *Towards a classification of 6x6 complex Hadamard matrices*, Open Systems & Information Dynamics, Vol:15, Issue:2, (June 2008) Page: 93 - 108.
Komplex Hadamard mátrixok karakterizációja csak 5 dimenzióig ismert, és a 6 dimenziós eset azért is érdekes, mert direkt kapcsolatban van a megoldatlan

úgynevezett MUB-6 problémával. Itt sikerült egy eddig nem ismert 6x6-os egy-paraméteres családot találnunk. Ez azonban még korántsem jelenti, hogy az összes 6x6-os Hadamard karakterizálva lenne.

P.Jaming, M. Matolcsi, P. Móra, F. Szöllősi, M. Weiner: *A generalized Pauli problem and an infinite family of MUB-triplets in dimension 6*, (közlésre beküldve), 2009.
Zárt formulákkal megadtunk egy végtelen, 1-paraméteres, MUB-hármas családot 6 dimenzióban. Ennek felbukkanása meglehetősen meglepő, hiszen a szabadsági fokok alapján legfeljebb véges sok megoldásra lehetne számítani. Ugyanakkor egy diszkretizációs eljárással és számítógépes kereséssel beláttuk, hogy a kapott MUB-hármasok közül semelyik sem egészíthető ki MUB-négyessé. A módszer alkalmas lehet a nevezetes MUB-6 probléma megoldására, azaz annak meghatározására, hogy maximum hány kölcsönösen torzítatlan bázist lehet megadni komplex 6 dimenzióban.

T. Matolcsi, M.Matolcsi, T.Tasnádi: *On the relation of Thomas rotation and angular velocity of reference frames*, Gen. Rel. Grav., 39, (2007), no 4., 413-426.
Az irodalomban egy korábbi eredmény összefüggésbe hozta giroszkópok Thomas rotációjának szögét egy a giroszkóppal együtt mozgó forgó megfigyelő szögsebességével. Később egy másik szerző ebből ellentmondásra jutott. Itt megvizsgáltuk, hogy pontosan miyen feltételek mellett érvényes az említett összefüggés, és miért fordult elő a látszólagos ellentmondás.

T. Matolcsi, M. Matolcsi: *Coordinate time and proper time in the GPS*, European Journal of Physics, Vol: 29, (2008), 1147-1151.
A GPS rendszerben használják a földi órákon telő időt és a szatelliteken lévő órákon telő időt szinkronizáló közelítő formulát. Ebben a cikkben megadtuk a pontos formulát. (Más kérdés, hogy a közelítés a jelenleg használt pályák és sebességek mellett gyakorlatban megfelelő pontosságot ad, így az

eredményünk jelenleg csak elméleti szempontból érdekes.)

Pozitív realizációk:

B. Nagy, M. Matolcsi, M. Szilvási: *Positive decomposition of transfer functions with multiple poles*, Positive Systems, Lecture Notes in Control and Information Sciences, Springer Berlin, Volume 341, (2006), 335-342.
A rendszer-invariáns kúpok létezésén alapuló szokásos megközelítés helyett itt egy algebrai módszert adtunk racionális transzfer függvények pozitív realizációjára. Előnye, hogy egyes esetekben alacsonyabb dimenziót ad, míg hátránya, hogy csak transzfer függvények egy bizonyos osztályára alkalmazható. Későbbi kutatásaink során kiderült, hogy az általános eset kezelésére nem ez a legcélszerűbb megoldás.

B. Nagy, M. Matolcsi, M. Szilvási: *Order Bound for the Realization of a Combination of Positive Filters*, IEEE Tran. Aut. Cont., 52, (2007), no 4., 724-729.
Ismert volt, hogy minden valós filter előállítható két pozitív filter különbségeként úgy, hogy ha a valós filter aszimptotikusan stabilis, akkor az előállító pozitív filterek is olyanok. Néhány speciális esetben becslést tudtak adni az előállító filterek rendjéről (azaz az állapotterek dimenziójáról), de az általános eset nyitott volt. Ebben a cikkben általános módszert adtunk a pozitív filterek konstrukciójára, és felső becslést az előállító filterek rendjére.

W. Czaja, P. Jaming, M. Matolcsi: *An efficient algorithm for positive realizations*, System & Control Letters, 57 (2008), no. 5, 436-441.
Hatékony és *általános* algoritmust adtunk transzfer függvények pozitív realizálására, amelynek jelentős előnye az eddig ismert algoritmusokkal szemben, hogy lényegesen kisebb dimenziós realizációt ér el. A módszer erősen támaszkodik az előző cikk (lásd eggyel feljebb) eredményeire, és az irodalom egy korábbi eredményére.

Egyéb eredmények:

M. Matolcsi, G. Munoz: *On the real polarization problem*, Math. Ineq. Appl., vol. 9/3, (2006) 485-494.
A valós polarizációs problémában itt sikerült belátni, hogy az ortonormált vektorrendszer szigorú lokális minimum (a sejtés az, hogy globális minimum). Továbbá egy példával megmutattuk, hogy Révész és Pappas egy korábbi módszere, amellyel belátták a sejtést 5 dimenzióig, nem működhet magas (36-nál nagyobb) dimenziókban.

K. Gyarmati, M. Matolcsi, I. Z. Ruzsa: *A superadditivity and submultiplicativity property for cardinalities of sumsets*, Combinatorica, (megjelenés alatt), 2009
Összeghalmazok számosságát vizsgáljuk, és ezekre vonatkozóan megmutatunk egy szuperadditivitási és egy szubmultiplikativitási egyenlőtlenséget.

K. Gyarmati, M. Matolcsi, I. Z. Ruzsa: *Plünnecke's inequality for different summands*, Building Bridges Conference, In: Bolyai Soc. Math. Stud., 19; M. Grötschel, G.O.H.Katona (eds.); János Bolyai Math. Soc. and Springer-Verlag, Budapest; 2008; 309-320.
Általánosítjuk a Plünnecke egyenlőtlenséget arra az esetre amikor n különböző halmazunk van, és minden k-tagú összeg számosságáról van információnk.

M. Matolcsi, I. Z. Ruzsa: *Sumsets and the convex hull*, (közlésre beküldve), 2009.
1-nél magasabb dimenzióban adunk alsó becsléseket összeghalmazok számosságára.