Az elért eredmények ismertetése

Nemlineáris egyensúlyi rendszerekkel kapcsolatos eredmények:

A [9] cikk a skalár derivált tulajdonságait Hilbert térben mutatja meg. A [4],[6],[12] dolgozatokban fontos feladatosztályokra fogalmazunk meg megoldhatósági feltételeket a skalár deriváltra alapozva. Az [5] dolgozatban topológikus módszerek segítségével vizsgáltuk a fixpontok és a nemlineáris operátorok pozitív sajátértékeit. A [3] cikkben a proximális pont módszert terjesztettük ki konvex és monoton optimalizálási feladatra.

A [14] dolgozat Euklideszi térbeli koizotón kúpok jellemzésével foglalkozik. Izotón vetítési kúp olyan zárt konvex kúp, amelyre a kúp által meghatározott rendezési reláció invariáns a kúpba vetítéssel szemben. Egy koizotón kúp a polárja egy izotón vetítési kúpnak. A dolgozat több ekvivalens egyenlőtlenség-rendszerrel írja le a koizotón kúpokat.

A [20] könyv fő újdonsága, hogy a skalár deriváltat és az aszimptotikus skalár deriváltat alkalmazza a fixpont elméletben, komplementaritási rendszerekben és Riemann geometriai problémákban.

A [21] dolgozatban a skalár deriváltra alapozva fontos feladatosztályokra fogalmaztunk meg megoldhatósági feltételeket. A [22] dolgozat új jellemzést ad egy leképezés reguláris és kivételes elemcsaládjának nem-létezésére, amelynek segítségével komplementaritási rendszerek megoldhatóságára nyerünk új feltételt.

A [28] dolgozatban egy rekurziót mutatunk be egy Hilbert térbeli nemlineáris komplementaritási feladatra vonatkozóan. A nemlineáris komplementáris feladatot egy zárt konvex kúp és a zárt konvex kúpon megadott folytonos leképezés segítségével értelmezzük. Ha a rekurzió konvergens, akkor a határértéke megoldása a nemlineáris komplementaritási feladatnak. Izoton projekciós kúpok esetén elégséges feltételeket adunk meg a leképezésre vonatkozóan, melyek biztosítják a rekurzió konvergenciáját.

Egy kúpra vonatkozó projekció meghatározása általában nehéz és számításigényes feladat. A [36] dolgozatban egy hatékony rekurzív módszert mutatunk be, amely véges számú lépés alatt leáll, megadva bármely pontnak a pontos projekcióját. Az iterációk száma mindig kisebb a tér dimenziójánál. A bemutatott módszer jelentősen növeli a [28] dolgozatban bemutatott rekurzió hatékonyságát. Ez a módszer hasznos lehet olyan gyakorlati feladatok esetén is, amelyekben partikuláris izoton projekciós kúpokra kell vetíteni. Egy ilyen kúp például a monoton nemnegatív kúp, amelyre vonatkozó projekció a rekonstrukciós feladatok esetén kerül előtérbe.

A [35] dolgozatban a szubduális hálókúpokat jellemezzük a pozitív rész leképezés egy általánosításának az izotonítása segítségével. Az általánosított pozitív rész leképezés a metrikus projekció segítségével van kifejezve. Tudomásunk szerint ez az első ilyen típusú jellemzés.

Nevezzünk egy generáló zárt konvex normális kúpot Hilbert térben röviden kúpnak. Ha a projekció egy ilyen kúpra vonatkozóan izoton a kúp által értelmezett rendezés szerint, akkor a kúp hálókúp. Ezeket a kúpokat G. Isac és A. B. Németh vizsgálta és alkalmazta először. A szerzők az ilyen típusú kúpokat izoton projekciós kúpoknak nevezték el. A [34] dolgozatban megmutatjuk, hogy ha létezik a kúpra vonatkozóan egy izoton retrakció, melynek a komplementuma hegyes, akkor a kúp hálókúp. A hegyesség egy általunk bevezetett igen gyenge feltétel. Egy leképezés akkor hegyes, ha a nulla vektort változatlanul hagyja és a leképezés képe semmilyen nullától különböző vektornak nem tartalmazza az ellentettjét. A dolgozat fő eredménye jelentős mértékben általánosítja G. Isac és A. B. Németh azon állítását, hogy minden izoton projekciós kúp hálókúp, és rámutat a tér hálóstruktúrájának egy alapvető tulajdonságára.

A [31] könyvfejezetben a skaláris deriváltakra vonatkozó középérték tételeket mutatunk be. Ennek a matematikai eszköznek a segítségével módszereket dolgozunk ki a nemlineáris komplementaritási feladatok nemtriviális megoldásai létezésének a vizsgálatára.

Egy leképezést izotonnak nevezünk, ha monoton növekvő egy csúcsos zárt konvex kúp által értelmezett rendezés szerint. Megtalálni az összes generáló csúcsos zárt konvex kúpokat, melyek teljesítik azt a tulajdonságot, hogy a rájuk vonatkozó projekció izoton egy nehéz feladat, melyet G. Isac és A. B. Németh vizsgált. Partikulárisan kimutatták, hogy az összes ilyen kúp hálókúp. Ezt a feladatot terjesztjük ki úgy, hogy a projekciót egy kúpra vonatkozó retrakcióval helyettesítjük. Bevezetve az éles leképezések fogalmát, kimutatjuk, hogy egy generáló csúcsos zárt konvex kúp akkor és csakis akkor hálókúp, ha létezik egy rá vonatkozó izoton retrakció, melynek a komplementje éles. Az izoton projekciós kúpokat nemlineáris komplementaritási feladatok megoldására használtuk. A [37] dolgozatnak a mozgatórugója az volt, hogy egyesítsük a nemlineáris komplementaritási feladatokat és a rendezés szerinti komplementaritási feladatokat egy általánosabb nemlineáris egyensúlyi rendszer fogalomkörébe.

A [38] dolgozatban bevezetjük a Banach terekben értelmezett általános rendezés szerinti komplementaritási feladatokra vonatkozó kivételes elem család fogalmát. Kimutatjuk, hogy ha egy teljesen folytonos leképezés által értelmezett általános rendezés szerinti komplementaritási feladatnak nincs kivételes elem családja, akkor létezik megoldása. Úgy véges dimenziós példákat, mint integrál operátorokra vonatkozó alkalmazásokat is bemutatunk.

A [37] dolgozatunk kiegészítéseként a [43] dolgozatban kimutatjuk, hogy minden generáló elem csúcsos zárt konvex kúp, melyre létezik egy izoton retrakció poliéder. Továbbá jellemezzük az autoduális és szubduális hálókúpokat az izotonitás segitségével, és megpróbáljuk kiterjeszteni a Moreau tételét retrakciókra.

A [41] dolgozatban kiterjesztjük az izoton projekciós kúpok fogalmát általánosított projekciókra. Kimutatjuk, hogy az összes ilyen kúp hálókúp. Ez onnan következik, hogy az általánosított projekciók a kúpra olyan izoton retrakciók a kúpra, melyeknek a komplementje éles leképezés.

Nemlineáris optimalizálási feladatokkal kapcsolatos elméleti eredmények:

Az [2] dolgozatban a mikroökonómia fogyasztás elméletének feltételes volumenmaximum-feladatát és az abban szereplő közvetlen és közvetett hasznossági függvényeket vizsgáljuk Marshall-féle keresleti függvény létezése esetén. A lineáris parciális differenciálegyenletek megoldhatóságát jellemző Frobénius tétel továbbfejlesztésével differenciálható pszeudomonoton leképzések integrabilitására adunk feltételt és az eredmény közgazdasági következményeit vizsgáljuk a kinyilvánított preferenciák témakörben.

Riemann geometriák strukturális vizsgálatának megkerülhetetlen alapeszköze a 4-ed rendű Riemann görbületi tenzor, amire példa az általános relativitáselmélet, továbbá különböző fizikai és mérnöki modellek. A Riemann görbületi tenzor használatának hátránya, hogy konkrét problémák esetén szinte kivitelezhetetlenek a számítások. A metszetgörbület használata helyettesíti a Riemann görbületi tenzort, de a konkrét számítások továbbra is túlságosan bonyolultak maradnak. A [24] dolgozatban megmutatjuk, hogy egyenlőség feltételek esetén az indukált Riemann metrika szerinti metszetgörbületek a probléma függvények gradiensei és Hesse mátrixai segítségével kiszámolhatók, a minimális és maximális metszetgörbületek meghatározása pedig Stiefel sokaságon történő nemlineáris optimalizálásra vezet. Az eredmények alapján konkrét strukturális vizsgálatok végezhetők, pl. megmutatjuk, hogy a Stiefel sokaságok nem konstans görbületűek és ellipszoid esetén a maximális metszetgörbület arányos a mátrix kondíciószámával.

A [15] dolgozatban kvadratikus törtfüggvények pszeudolinearitását, [25]-ben pedig kvadratikus törtfüggvények affinitását és pszeudolineáris kvadratikus törtfüggvények gradiensét jellemezzük.

A Nemlineáris optimalizálás című anyag [11] a Budapesti Corvinus Egyetem gazdaságmatematikai elemző közgazdász hallgatók részére készült. A jegyzet szakít azzal az általános gyakorlattal, hogy az anyag tárgyalása módszertani szempont alapján történik, inkább a gyakorlati alkalmazások lehetőségét szem előtt tartva, a modellezésre helyezi a fő hangsúlyt.

Nemlineáris optimalizálási feladatok megoldásával kapcsolatos módszertani és implementációs eredmények:

A kvadratikus optimalizálás fontos feladatosztály az operációkutatásban, mert a szekvenciális kvadratikus programozás a nemlineáris optimalizálás alapvető módszertani megközelítését adja. A [7] dolgozatban azt vizsgáljuk, hogyan viselkedik strukturálisan a nemszeparábilis kvadratikus feladatok ritkássága belső pontos algoritmusokban. Megmutatjuk, hogy a lineáris programozásra kifejlesztett ritkásságot kezelő heurisztikák hogyan vihetőek át a kvadratikus programozás esetére belső pontos algoritmusokban. A módszereink hasznosságát numerikus példákon keresztül igazoljuk.

A belső pontos módszerek iterációi közben nagyméretű, szimmetrikus indefinit rendszerek megoldását kell meghatároznunk, amit a gyakorlatban Cholesky-szerű szimmetrikus dekompozícióval oldunk meg. A számítások műveletigényét nagyban befolyásolja speciális ritkássági struktúrák felismerése. A [13] dolgozat egy új módszert ismertet annak detektálására, ha a normál egyenletrendszer használata nagymértékű feltöltődéshez vezet. Az algoritmus pontosan és hatékonyan meghatározza azokat a változókat, amelyek oszlopai a feltöltődésért felelősek. Az ilyen oszlopok leválasztása és külön kezelése által a hatékonyság lényegesen növelhető, amit numerikus kísérleteken keresztül igazolunk.

A [23] dolgozat a belső pontos algoritmusok direkt lineáris algebrai módszereinek numerikus viselkedését vizsgálja. Bemutatjuk, hogy a véges pontosságú aritmetika milyen korlátokat szab az algoritmusoknak, illetve, hogy milyen tulajdonságú feladatok esetében lépnek fel ezek a korlátok. Bemutatunk egy regularizációs eljárást, melynek bizonyítjuk konvergenciáját bizonyos feltételek mellett. Bemutatjuk, hogy az eljárás viselkedése relaxációs technikákkal tovább javítható. Numerikus kísérletekkel bizonyítjuk, hogy a leírt módszerekkel a belső pontos algoritmusok számára numerikusan nehezen kezelhető eseteket is sikeresen meg lehet oldani a gyakorlatban.

A számítástechnika jelenleg egyik fő iránya a párhuzamos működésű eszközök fejlesztése. Az ilyen környezetben megfigyelhető, hogy az adatforgalom válik a szűk keresztmetszetté, nem pedig az aritmetikai műveletek végzése. Új blokkolási sémát fejlesztettünk ki a belső pontos algoritmusoknál előforduló szimmetrikus mátrixok faktorizációjához, mely a többmagos és a hierarchikus memóriastruktúrájú architektúrákat egyaránt hatékonyan kihasználják. A módszert sikeresen teszteltük dual-core architektúrájú hardver környezetben [33].

Speciális technikákat fejlesztettünk tovább konvex kvadratikus feltételek kezeléséhez belső pontos algoritmusokkal. Új módszereket dolgoztunk ki a ritkás tulajdonságú, nagyméretű feladatok kezelésére, melyekkel néhány gyakorlatban gyakran előforduló struktúrájú feladat megoldása lényegesen hatékonnyá vált. A belső pontos algoritmus numerikus robusztusságát egy új adaptív skálázási módszerrel javítottuk. A számítási kísérletek bíztató eredményeket hoztak [32,42].

<u>Nemlineáris optimalizálás alkalmazása döntési feladatok megoldásánál:</u>

A többszempontú döntési módszerekben fontos szerepet játszanak a páros összehasonlítási mátrixok a döntési szempontokhoz rendelt fontossági súlyok meghatározásánál. A [16] dolgozat a páros összehasonlítás mátrixokra megfogalmazott legkisebb négyzetes közelítés problémájának megoldását mutatja be. A kapcsolódó célfüggvény nemlinearitása és nemkonvexsége miatt általában több optimum létezik. A globális optimalizálási feladat visszavezethető egy többváltozós polinomrendszer összes pozitív gyökének megkeresésére, amely feladatra a homotópiás algoritmus alkalmazható 8x8-as mátrixméretig.

A [19] dolgozat is a páros összehasonlítási mátrixok konzisztens mátrixokkal való közelítésével foglalkozik a legkisebb négyzetek értelmében. A klasszikus logaritmusos transzformáció alkalmazásával átírjuk a feladatot egy speciális egyváltozós függvényen alapuló szeparábilis programozási feladat alakjára. Elégséges feltételeket adunk a célfüggvény konvexitására vonatkozóan, ilyen esetben a feladat lokális kereső technikákkal is megoldható. Az általános esetre egy korlátozás és szétválasztás módszert javaslunk.

A páros összehasonlítás mátrixokra vonatkozó kérdések közül számos cikk foglalkozik a súlyok kiszámításának problémájával, de lényegesen kevesebb vizsgálja az inkonzisztencia mérésének és detektálásának kérdéseit. A [17] dolgozatban a Saaty által bevezetett, a reciprok mátrix domináns sajátértékéből származtatott CR inkonzisztencia-mérőszámra vonatkozó vizsgálatainkat összegezzük, és a Koczkodaj által javasolt alternatív mérési lehetőségeket (CM és GD) mutatjuk be. Ez utóbbiak lényeges tulajdonsága, hogy a mátrix elemeiből közvetlenül felírhatók.

A sajátvektor módszert kiterjesztettük a nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrixokra, így a korábbinál lényegesen kevesebb számú összehasonlításból is lehetővé válik a döntéshozói preferenciák feltérképezése és számszerűsítése. Megmutattuk, hogy a nem teljesen kitöltött páros összehasonlítás mátrix gráf-reprezentációjában az összefüggőség szükséges és elégséges feltételt ad a kapcsolódó sajátérték-optimalizálási feladat megoldásának egyértelműségére [26, 29].

A páros összehasonlítás mátrixok egy újonnan definiált inkonzisztencia-mérőszáma azon elemek minimális száma, amelyek megváltoztatásával a mátrix konzisztenssé tehető. Jellemeztük az 1, 2 ill. 3 elem megváltoztatásával konzisztenssé tehető mátrixokat és a valós döntési problémákból származó tapasztalati mátrixokból álló mintában megvizsgáltuk az egyes típusok előfordulási gyakoriságát [40].

A páros összehasonlítás mátrixokra vonatkozó legkisebb négyzetes feladat megoldására adtunk egy lokális kereső algoritmust [39]. Az irodalomban leggyakrabban alkalmazott 1-9-es skálánál szűkebb skálát javasoltunk páros összehasonlításokra, ezt a változtatást matematikai és gyakorlati szempontból is megindokoltuk [30].

<u>Nemlineáris optimalizálás alkalmazása további feladatok megoldásánál:</u>

A [18] dolgozatban matematikai programozási eszközök alkalmazásával az L-Nash megoldás egzakt és aszimptotikus alkujátékok Nash egyensúlypontjaként való előállítását mutatjuk meg kétszemélyes játékok esetében.

Az ortonormalitási feltételek melletti optimalizálás feladatát d.c. (difference of convex) programozási feladat alakjára írtuk át, kihasználva a szereplő függvények két konvex függvény különbségeként való kezelhetőségét. A d.c. programozási feladat megoldására egy korlátozás és szétválasztás alapú módszert alkalmaztunk [27].