A palyazat negy eve alatt nagyon sikeresen dolgoztunk es sok szep matematikai eredmenyt igazoltunk. Nem igazan matematikai eredmeny, de meg kell emliteni, hogy Toth Geza 2008-ban megkapta az MTA doktora cimet, tovabba Barany Imret a Magyar Tudomanyos Akademia levelezo tagjanak, Furedi Zoltant pedig rendes tagjanak valasztottak meg 2010-ben. Az eredmenyekbol nehany jelentosebbet ismertetunk az alabbiakban.

Barany Imre tobbfele temaban dolgozott az utobbi negy evben. Ezek kozul jelentos eredmenyeket ert el veletlen politopokkal kapcsolatban, peldaul centralis hatareloszlas tetelt bizonyitott abban az esetben, mikor a kiindulo test politop (Matthias Reitznerrel kozosen), illetve Gauss politopokra (Van H Vuval kozosen). Ezenkivul altalanos also becslest adott veletlen politop terfogatanak illetve csucsszamanak szorasara. Konvex halmazbeli veletlen ponthalmazbol maximalisan hanyat lehet kivalasztani ugy, hogy azok mind konvex helyzeetben legyenek? Ez a kerdes racspontok eseten merult fol eloszor. A veletlen esetben Barany Imre es Ambrus Gergely erte el ebben az iranyban az elso es eleg pontos eredmenyeket, ebben az iranyban tovabbi kutatasok folynak, mert szamos erdekes kerdes van meg nyitva. Megemlitendo, hogy Barany Imre attekinto cikk irasara kapott felkerest a Bulletin of the AMS folyoirattol. A cikk mar meg is jelent Random points and lattice points in convex bodies cimmel.

Barany Imre folytatta kombinatorikus geometria kerdesek vizsgalatat. Peldaul a sok tarsszerzos “Very colourful theorems” cimu cikkben Caratheodory, Tvebreg, es Kirchberger teteleinek egy kozos es messzire vezeto altalanositasat igazoltak. Matousekkel kozosen azt bizonyitottak, hogy a szinezett Caratheodory tetelben legalabb d^(2/5) tarka szimplexet lehet tatalni, ami nagysagrendileg pontos.

Barany Imre es Por Attila (reszben Pavel Valtrral kozosen) Fekete es Woeginger egy regota nyitott problemajat oldotta meg. A kerdes az volt, hogy vajon minden veges sikbeli halmaz elemei sorbarendezhetok ugy, hogy az igy adodo torottvonal minden szoge legalabb alfa legyen, valamilyen pozitiv alfaval. Uj modszert vezettek be, amivel sikerult alfa = 20 fokot bizonyitani, tovabba ezt az eredmenyt kiterjeszteni magasabb dimenziokra is. Barany es Por a diszkret es vegtelen ponthalmazok esetere is igazolta ilyen sorbarendezes letezeset kicsit kisebb, alfa=10 fokos szoggel.

A topologia modszerei egyre gyakrabban es egyre sikeresebben alkalmazhatok geometriai kerdesek vizsgalatanal. Barany Imre P. Blagojeviccsel es Szucs Andrassal kozosen igazolta, hogy egy sikbeli konvex halmazt fol lehet darablni harom egyenlo teruletu es egyenlo keruletu konvex reszre. A fo nehezseget az okozza, hogy a reszek konvexek, emiatt a megfelelo topologikus ternek csak bizonyos reszet kell tekinteni, illetve megerteni a topologiajat. Ebben az iranyban tovabbi fejlemenyek varhatok. Megemlitendo meg, hogy Barany (Castroval es Hubarddal kozosen) igazolta, hogy d-dimenzioban minden d+1 jol-szeparalt konvex halmaz adott (alfa) aranyban egyetlen hipersikkal szetvaghato, sot azt is, hogy csak egy ilyen alfa-metszet van. Itt is topologia kellett a bizonyitasban.

Ennek az eredmenynek Kincses Janos egy nagyon erdekes folytatasat es kiterjeszteset bizonyitotta: meghatározta konvex halmazok alfa-metszeteinek topológiai típusát. Belátta, hogy a kérdéses tér diffeomorf egy gömbfelülettel. Egyben élesítette S. E. Cappell, J. E. Goodman, J. Pach, R. Pollack, M. Sharir, R. Wenger, eredményét, amely a közös érintök topológiai típusára vonatkozik. Ezek az eredmények szigorúan konvex halmazokra ervenyesek. Ebböl egy cikk született. Kincses vizsgálta meg a nem szigorúan konvex esetet is. Ekkor is alkalmazható a szigorúan konvex eset módszere, diffeomorfizmus helyett homeomorfizmus várható. Az egész egy konvex halmazokra vonatkozó implicit függvény tételen múlna, ami nagyon erdekes volna es ami egyelore meg nyitott.

Dolnikovnak a komplex keresztpolitóp Helly dimenziójára vonatkozó kérdése, valamint a Hanner politópok vizsgálata irányította a figyelmet konvex halmazok L_1 összege Helly-dimenziójának meghatározására. Kincsesnek éles alsó és felsö korlátot adott a Helly dimenzióra. Ezen módszereket alkalmazva sikerült Hanner politópok egy családjára kiszámolni a Helly dimenziót.

Furedi Zoltan (tarsszerzovel) modern, egyszeru bizonyitast adott Erdos es Rogers 1959-bol szarmazo kovetkezo klasszikus eredmenyere: An n-dimenzios ter mindig lefedheto barmely adott konvex test eltolt peldanyaival, nem surubben mint 20n logn. Az uj bizonyitas a feladat diszkretizalasa (vegesse alakitasa) utan a Lovasz lemman alapulo veletlen modszeren mulik. Furedi Zoltan masik szep eredmenye szerint egy haromszog homotetikus eltoltjaival, es a tukorkepenek homotetikus eltoltjaival nagyon gazdasagosan lehet lefedni az eredeti haromszoget.

Furedi Zoltan tobbek kozott H-design-okkal foglalkozott. A definicio igy szol: Legyen H egy fix graf, grafok egy halmazat, P={H_1, ..., H_m}-t, n-pontu H-pakolasnak nevezzuk, ha (1) minden H_i H-val izomrf , (2) ezek a kopiak eldiszjunktak, (3) uniojuknak osszesen legfeljebb n pontja van. Ha ezen unio epp a teljes graf K_n akkor perfekt H-pakolasrol (vagy H-design-rol) beszelunk.Wilson (1972-75) nevezetes teteleibol kovetkezik, hogy minden P kiterjeszteto egy H-design-a nehany pont es tovabbi kopiak hozzavetelevel. Sot, ha f(P) jeloli a hozzaveendo pontok minimalis szamat akkor f(P)< cn, ahol c csak a H-tol fugg. Nemregiben Hilton es Lindner egy kisebb attorest ertek el, belattak, hogy f(C_4)=o(n) (valojaban O(n^{3/4})-et bizonyitottak. Furedi, tarsszerzovel (Lehel Jeno), belatta hogy f(C_4) asymptotikusan pont n^{1/2}. Ez a tema meg rengeteg erdekes problemat tartalmaz es nemzetkozileg egy igen sokat vizsgalt kutatasi irany. A kodelmelet egyik fo kutatasi iranya olyan kodok vizsgalata, ahol az uzenetet vissza lehet kovetkezteteni komoly serules, pl az uzenetek osszekeveredese eseten is. Ezeket hivjuk felulirt (superimposed) kodoknak. Furedi szamos eredmenyt publikalt ebben a most ismet megujulo es divatos temakorben, elsosorban az un. geometriai kodok konstrualasarol.

Solymosi Jozsef additiv kombinatorikai illetve additiv szamelmeleti problemakkal foglalkozik, kulonos tekintettel azokra a problemakra ahol geometriai modszerek hatekonyan alkalmazhatoak. Ilyen modszerrel sikerult peldaul az eddigi legjobb becslest adnia arra, hogy legalabb mekkora kell legyen |A+A|+|A*A|, ha A egy n elemu, valos szamokbol allo halmaz. Ez Erdos Pal egy regota ismert es sokat vizsgalt kerdese. Solymosi egyik tovabbi szep (I. Labaval kozosen elert) eredmenye egy Pach-Sharir tipusu incidencia tetel bizonyos R^d-beli algebrai gorbekre, es R^3-beli algebrai feluletekre. Ennek az eredmenynek meg sok alkalmazasa lesz.

Toth Geza grafok metszesi szamaival es lerajzolasaival foglalkozott. Egy G graf metszesi szama az el-metszesek minimalis szama G osszes lerajzolasara. Ennek variacioja a kovetkezo ket parameter. A par-metszesi szam pair-cr(G) a metszo elparok minimalis szama, a paratlan metszesi szam odd-cr(G) pedig az egymast paratlan sokszor metszo elparok minimalis szama. Nyilvan minden grafra
odd-cr(G) $\le$ pair-cr(G) $\le$ cr(G).
Toth Geza olyan grafokat konstrualt, amelyekre $0.855 \cdot$pair-cr(G) $>$ odd-cr(G). Ez Pelsmajer, Schaefer es Stefankovic korlatjat javitja. A konstrukcionk egyben valaszt ad Tutte egy regi kerdesere. Kisse javitva Valtr korlatjat, azt is belatjak hogy ha G par-metszesi szama k akkor (hagyomanyos) metszesi szama cr(G) legfeljebb $O(k^2/\log^2 k)$.

Pach Janos es Toth Geza bebizonytottak hogy ha egy graf lerajzolhato a toruszra metszes nelkul, es a maximalis fokszama d, akkor a sik-metszesi szama legfeljebb cdn vagyis linearis. Erosebb es altalanosabb valtozatot is bizonytottak, ahol a torusz helyett tetszoleges iranyithato felulet szerepelhet, es a fokszamokra vonatkozo korlatozast is kikuszoboltek. Kesobb ezeket az eredmenyeket Pach es Toth (Boroczky Karollyal kozosen) altalanositottak nem iranythato feluletekre.

Egy sikbeli C halmazt fedes-felbonthatonak mondunk, ha letezik olyan k konstans, hogy ha a sik k-szorosan le van fedve C eltoltjaival, akkor az eltoltak ket osztalyba sorolhatoak ugy hogy mindket osztaly kulon is lefedje a sikot. 1980-ban Pach Janos vetette fol a kerdest, hogy mely halmazok fedes-felbonthatoak. Azt sejtette hogy minden konvex halmaz az. 1986-ban bebizonyitotta hogy a kozeppontosan szimmetrikus nyilt sokszogek fedes-felbonthatoak. Toth Geza Tardos Gaborral egyutt igazolta, hogy minden nyilt haromszog fedes-felbonthato. Kesobb Palvolgyi Domotorrel azt is bebizonytotta hogy minden nyilt konvex sokszog fedes-felbonthato. Pach es Toth Tardos Gaborral egyutt belattak, hogy a konkav sokszogek NEM fedes-felbonthatok.

A ``discharging method'' (talan sulyozasos modszer) egy hatekony technika amit gyakran alkalmaznak sikgrafokkal, vagy sikba rajzolt grafokkal kapcsolatos bizonyitasokban. Toth Geza es Rados Radoicic egy osszefoglalo cikkben attekintik a modszer legfontosabb alkalmazasait. Egy uj alkalmazast is adnak, amellyel megjavtjak Pach es Sharir egy eredmenyet, mely szerint ha G n darab konvex sikbeli halmaz metszesgrafja, es nem tartalmaz 4 hosszu kort, akkor csak linearisan sok (cn) ele lehet. Ezt altalanostottak 4 hosszu kor helyett $K_{2,3}$-ra es a 6 hosszu korre.

Egy sikbeli ponthalmaz rendtipusa az osszes harmas iranyitasainak a listaja. Hasonloan definialhatjuk paronkent diszjunkt konvex halmazok csaladjanak is

a rendtpusat. Legyen A, B, C harom, paronkent diszjunkt konvex halmaz. Ha A, B, C kozos konvex burkan mindharom halmaz egy-egy intervallumkent jelenik meg, akkor az A, B, C harmas iranytasa egyertelmu, megegyezik a harom megfelelo intervallum iranytasaval. Elkepzelheto meg hogy a harom halmaz kozul az egyik ket intervallumkent jelenik meg a hataron, illetve hogy meg sem jelenik. Ezekben az esetekben azt mondjuk hogy A, B, C iranyitasa nem egyertelmu. Konstrualunk olyan, n darab paronkent diszjunkt konvex halmazbol allo rendszert, ahol mindegyik harmas iranytasa egyertelmu, de az gy kapott rendtpus nem reprezentalhato pontokkal.
Sot, legfeljebb $n^{\log 8/\log 9}$ darab valaszthato ki kozuluk, amelyeknek a rendtpusa pontokkal is reprezentalhato. Hasonlo alltasokat bizonytunk a dualis verzioban is, pszeudo-egyenes elrendezesekre.

Pach Janos sokoldalu es erdemenyes munkat folytatott a diszkret geometria tobb teruleten is. Egy erdekes konvex geometriai eredmenye a Center Point tetelt terjeszti ki diszjunkt konvex halmazok veges rendszerere. Geometriai grafok keresztezodesi szamanak tobbfele definicioja van. Pach Janos bizonyitotta (reszben tarsszerzokkel), hogy ezek a keresztezodesi szamok tobbe-kevesbe jol vannak rendezve. Ehhez kapcsolodo kerdes a sikbeli konvex halmazok metszetstrukturajanak leirasa. Ennek egyik alapveto eszkoze a Lipton-Tarjan szeparacios tetelnek az a valtozata, amely azt allitja, hogy ha a metszetstruturat leiro grafnak m ele van, akkor a graf ket lenyegeben egyform meretu grafra esik szet alkalmasan valasztott $O(m^{1/2})$ el elhagyasaval. Pach Janos es J. Fox sejtettek, hogy ez az allitas igaz marad string-grafok, azaz olyan grafok eseten is, amelyek folytonos gorbek metszetstrukturajat irjak le. Pach es Fox be is bizonyitotta ezt abban az esteben, mikor barmely ket gorbe legfoljebb t-szer metszi egymast. (A t-tol valo fugges az O(..) jelolesben bujik meg..) Teljes altalanossagban viszont csak
$O(m^{3/4}\sqrt{\log m})$ meretu elvago elhalmaz letezeset tudtak bizonyitani.
De meg ez a gyengebb tetel is eleg volt annak igazolasara, hogy minden olyan n csucsu string-grafnak, amelyben nincs teljes paros $K_{t,t}$ reszgraf,
legfoljebb c_tn ele van, itt c_t egy cask a t-tol fuggo allando. A tetel egy masik alkalmazasa azt adja, hogy a lokalisan f-szeru string-grafok globalisan is fa-szeruek.

Jelen pillanatban ezek a Pach Janos altal bevezetett modszerek vezetnek a legjobb ismert becslesekre olyan grafok maximalis elszamara vonatkozoan, melyek lerajzolhatoak anelkul, hogy lenne bennuk k paronkent metszo el.

Por Attila (T. Muller es J-S Serenivel) grafok "hatar"-at vizsgalta. Karakterizaltak azokat a grafokat, amiknek maximum 4 pont van a hataran es also korlatot adtak a hatarpontok szamara a maximalis es minimalis fokszam fuggvenyeben. Egy grafban egy pont a hataron van, ha egy masik pontbol ez a pont van a legmeszebb lokalisan. Egy masik iranyban Por Attila N Lichardopol es J-S Serenivel kozosen igazolta a Bermon-Thomassen sejtest k=3 eseten. A sejtes azt mondja hogy ha egy iranyitott grafban minden pontnak a befoka legalabb 2k-1, akkor letezik a grafban k darab pont-diszjunkt iranyitott kor. A k=1 eset trivialis es a k=2 esetett Thomassen igazolta.

Por Attila (D Kral, E Macajova es J-S Serenivel kozosen) igazolta, hogy leteznek univerzalis Steiner harmas rendszerek, es karakterizaltak is ezeket. Egy Steiner harmas rendszer univerzalis, ha barmely 3 regularis G grafra letezik egy elszinezes a G grafon mely minden pontra a vele szomszedos 3 elet a rendszer egy harmasaval szinezi ki. Por Attila (P Hamburgerrel es M Walshal) kozosen grafok Kneser reprezentacioin dolgozott. Egy graf kneser reprezentacioja egy a pontokhoz "szin"eket rendelo fuggveny mely pontosan nem-szomszedos pontokhoz rendel diszjunk szin-halmazokat. Ez szoros kapcsolatban all a frakcionalis kromatikus szammal. Ketfelekeppen lehet minimalizalni a reprezentaciot: az osszes hasznalt szin, illetve az egyes pontokhoz hasznalt maximalis szinek szama. Ugyancsak Por Attila, P. Hamburger es M Dunkum-al kozosen megjavitottuk Chudnovsky Seymour es Sullivan egy eredmenyet. Az eredeti eredmeny szerint, ha G egy haromszog-mentes iranyitott egyszeru graf, es k azon pont-parok szama amik kozott egyik iranyba se megy el, akkor tovabbi k el elhagyasaval kor mentesse lehet tenni a grafot. Por es tarsszerzoi igazoltak, hogy korulbellul 0.88k el elhagyasa mar elegendo, a legjobb eredmeny 0.5k lehet..

Por Attila es David Wood lathatosagi grafokon es blokkolo ponthalmazokon dolgoztak. Ha P egy veges ponthalmaz a sikon, akkor ket pont a P-n belul "latja" egymast ha az oket osszekoto szakaszon nincs a P-nek tovabbi pontja. A P altal generalt lathatosagi graf a P pontjain ahol az elek eppen azok a pontparok amik latjak egymast. Egy B ponthalmaz blokkolja P-t, ha P barmely ket pontjat osszekoto szakasz tartalmazza B egy pontjat.