Szakmai beszámoló a „Biliárdok modern elmélete és annak alkalmazásai” című, F 60206 számú OTKA pályázat zárójelentéséhez

2010. február

1. A kutatás előzményei és háttere

Matematikai értelemben biliárdokról akkor beszélünk, ha egy pontszerű részecske mozgását vizsgáljuk, amely egy szakaszonként C^2 határú $Q \subset \mathbb{T}^d$ tartomány besejében egyenes vonalú egyenletes mozgást végez, a tartomány ∂Q határához érve pedig tökéletesen rugalmas ütközéssel verődik vissza (a beesési szög megegyezik a visszaverődési szöggel). A tartomány alakjától függően a biliárdok rendkívül változatos dinamikai viselkedést mutathatnak. A kutatásaim egyik fő tárgyát jelentő *kaotikus biliárdok*ban a dinamika hiperbolikus jellegű (nem nulla Ljapunov exponensek). Ezek a rendszerek sok szempontból hasonlítanak a jól ismert sima, egyenletesen hiperbolikus (vagy Anosov) rendszerekre, ennek megfelelően a természetes invariáns mérték ergodicitását és erős statisztikus tulajdonságait (gyors korreláció-lecsengés, határeloszlás-tételek stb.) várjuk. Azonban sajátos tulajdonságaik (szingularitások, nem-korlátos deriváltak, magas dimenziós esetben erős anizotrópia) miatt kezelésük komoly matematikai kihívást jelent. Ugyanakkor a kaotikus biliárdok igen gyakran kerülnek elő úgy is, mint a fizika népszerű modelljei; az ergodikus és statisztikus tulajdonságok pontos megértése az ilyen jellegű modellezéshez is feltétlen szükséges. Matematikailag szigorú tárgyalásuk Sinai szóróbiliárdokra vonatkozó úttörő eredményeivel indult ([29]), ezekben a rendszerekben a $Q = \mathbb{T}^d \setminus \cup_{k=1}^{K} C_k$, ahol a C_k szórótestek szigorúan konvexek. Később másmilyen geometria esetén is sikerült kaotikus viselkedést kimutatni, többek között olyan esetekben is, amikor maga a Q tartomány konvex (pl. Bunimovich stadion, [17]). A hosszú távú viselkedés – pl. hiperbolicitás erőssége, ehhez kapcsolódóan az egyensúlyhoz való konvergencia sebessége, vagy a határeloszlástételek jellege – érzékenyen függ Q alakjának apró részleteitől.

Az utóbbi néhány évben új utak nyíltak meg általában hiperbolikus dinamikai rendszerek kutatása, és speciálisan a kaotikus biliárdok vizsgálata területén. Ez matematikai szinten egy komoly áttörést jelent új módszerek megjelenéséhez kapcsolódóan. Lai-Sang Young Markov visszatérésekre épülő torony kornstrukciója ([31]), mely a szimbolikus dinamikai megközelítés egy különösen hatékony változatának is tekinthető, lehetővé tette egy több évtizede nyitott sejtésnek, kétdimenziós szóróbiliárdok exponenciális korreláció-lecsengésének a bizonyítását ([31],[18]); a módszert azóta számos más rendszer vizsgálatára is sikerrel használták. Egyre szélesebb körben és egyre változatosabban kerül alkalmazásra a lineáris operátorok spektrális elmélete; ez a lecsengési sebesség vizsgálata mellett jelentheti határeloszlástételek, invarianciaelvek bizonyítását is. Rendkívül ígéretesek azok a megközelítések is, amelyek szimbolikus dinamikai kódolás nélkül, közvetlenül a fázistéren vizsgálják a statisztikus tulajdonságokat. Ez jelentheti spektrális módszerek alkalmazását egy a fázistéren értelmezett függvényekre épülő, dinamikához adaptált Banach téren ([3], [4]), vagy az instabil sokaságokra koncentrált mértékek fejlődésének közvetlen tanulmányozását és csatolását (ún. standard pár technikák, [19]). Ezeket a módszereket először a biliárdoknál technikailag egyszerűbb dinamikákra – pl. szakaszonként tágító leképezésekre, Anosov rendszerekre – sikerült alkalmazni. Szerencsésnek érzem magam, hogy a biliárdok különböző típusaira való általánosításon én is dolgozhattam, illetve részben jelenleg is dolgozom.

A matematikai újításokkal szorosan összefügg, hogy a dinamikai rendszerek szigorú elméletét egyre összetettebb, reálisabb fizikai kérdések vizsgálatára sikerül alkalmazni. Gondolok itt elsősorban nem-egyensúlyi statisztikus fizikai jelenségek modellezésére. Ezen a területen különösen fontos a fizikai sajátosságokat megőrző, ugyanakkor technikailag kezelhető modellt választani. Sokszor érdemes a jelenségeket először egy a biliárdnál könnyebben kezelhető, leegyszerűsített rendszerben tanulmányozni, és a kutatás egy későbbi fázisában rátérni a fizikailag reálisabb biliárd modellekre. Saját kutatásaim során is ebben a szellemben jártam el.

2. Egyenletesen hiperbolikus biliárdok

A pályázat időtartama alatt elért eredményeim egyik legfontosabb csoportja *magas dimenziós szóróbiliárdok ergodikus és statisztikus tulajdonságaira* vonatkozik. Ezen a témán Tóth Imre Péterrel közösen dolgoztunk. Sikerült bebizonyítanunk egy régóta nyitott sejtést: magas dimenziós szóróbiliárdokban (a szigularitásokra vonatkozó úgynevezett komplexitási feltétel mellett) a *korreláció-lecsengés sebessége exponenciális.* A [11] dolgozatban közölt bizonyítás Chernov és Young módszerein, konkrétan a fent említett torony konstrukció magas dimenziós általánosításán múlik. Ugyanakkor a magas dimenziós esetben számos új nehézséggel kellett megküzdenünk, az elvi megközelítés és a technikai részletek szempontjából egyaránt, különösen az érvelés magvát adó *növekedési lemma* tárgyalásakor. Módszereinkről 3×1 órás minikurzust tartottunk a bécsi Erwin Schrödinger Intézetben (ESI) a "Hyperbolic Dynamical Systems" szemeszteren, ennek anyagát a [12] dolgozatban közöltük. Eredményeink jelentőségét és a kiváltott nemzetközi visszhangot mutatja az is, hogy a [11] közlemény elnyerte az Annales Henri Poincaré folyóirat 2008 évi díját, melyet az adott évben legjelentősebbnek tartott dolgozatnak ítélnek oda ennek a matematikai fizikában vezető folyóiratnak a szerkesztői.

A fentiekhez kapcsolódóan magas dimenziós szóróbiliárdokra vonatkozó kutatásaink két további csoportját érdemes még megemlíteni. Egyrészt a Pavel Bachurinnal közös [1] dolgozatban a növekedési lemmát használva sikerült a lokális ergodicitási tételt (más néven alaptételt) magas dimenziós szóróbiliárdok egy eddiginél tágabb osztályára igazolni, méghozzá az eredeti, igen elegáns, Sinai-féle gondolatmenet alapján. Másrészt vizsgáltuk a [11] feltevései között szereplő, szingularitások szubexponenciális komplexitására vonatkozó feltétel teljesülését. Ezt a tulajdonságot az irodalom természetesnek tartja, így kisebb meglepetést váltott ki, hogy sikerült egy ellenpéldát konstruálnunk; egy olyan magas dimenziós szóróbiliárd konfigurációt, melyben a szingularitási halmaz komplexitása exponenciálisan növekedik. Ennek az ellenpéldának a bemutatását a [13] dolgozatban tervezzük, melynek beküldése néhány héten belül várható.

A Young-féle konstrukció magas dimenziós áltatlánosítása mellett sokat foglalkoztam más, a statisztikus tulajdonságokat közvetlenül a fázistéren tanulmányozó módszerek vizsgálatával, többek között dinamikához adaptált Banach terek konstrukciójával (ld. a beszámoló 1 fejezetét). Ezeknek a megközelítéseknek jelentős szerepe lehet a rendszer kis perturbációkra való érzékenységének, vagy a folytonos idejű dinamika keverési sebességének tanulmányozásakor (erről részletesebben írok a beszámoló 3 fejezetében). Jelentős előrelépésnek tartom, hogy Viviane Baladi-val és Sébastien Gouëzel-lel közös kutatásainkban sikerült a [3] és [4] dolgozatok megközelítését kétdimenzós szóróbiliárdokra általánosítani, erre vonatkozó [2] dolgozatunk rövidesen elkészül.

Egyenletesen hiperbolikus biliárdokhoz kapcsolódik még a szintén Tóth Imre Péterrel közös [10] közlemény, melyben úgynevezett puha biliárdokat tanulmányozunk. Ezekben a fizikai alkalmazások szempontjából is érdekes rendszerekben a pillanatszerű rugalmas ütközések helyett valamilyen más, potenciállal leírt kölcsönhatás határozza meg a mozgást. A [10]-ban közölt eredmények jelentőségét az adja, hogy egy új jelenség feltárásával elsőként sikerült bizonyítanunk magas dimenziós puha biliárd modellek hiperbolicitását.

3. Gyengén hiperbolikus biliárdok

A pályázat időtartama alatt sokat foglalkoztam olyan kétdimenziós biliárdokkal, amelyekben – a 2 fejezetben tárgyalt szóróbiliárdokkal ellentétben – a Q tartomány valamilyen jellegzetes vonása miatt a hiperbolicitás nem egyenletes. Ennek megfelelően ezekben a dinamikákban jellemzően a korreláció-lecsengés sebessége exponenciális helyett csupán polinomiális, a centrális határeloszlástétel helyett pedig sokszor valamilyen nem standard határeloszlástétel jelentkezik. Bizonyos esetekben a dinamika ergodicitása sem magától értetődő (a fázistéren úgynevezett KAM szigetek jelenhetnek meg). A kétdimenziós, gyengén hiperbolikus modellek jelentősége ahhoz is kapcsolódik, hogy ezekben a rendszerekben jól megfigyelhetőek a fizikai alkalmazások szempontjából igen fontos intermittens jelenségek.

Az egyik legnépszerűbb gyengén hiperbolikus biliárd modell a *Bunimovich stadion*, ahol a Q konvex tartományt két azonos sugarú félkör és az azokat összekötő párhuzamos egyenes szakaszok határolják. A biliárd dinamika ergodicitását még 70-es években tárgyalta Leonid Bunimovich ([17]), a statisztikus tulajdonságokra vonatkozó eredmények azonban sokáig várattak magukra. Nikolai Chernov és Hongkun Zhang igazolták, hogy a korrelációk $1/n$ ütemben csengenek le ([23], [24]), ez természetesen vetette fel a határeloszlástétel kérdését. Sébastien Gouëzel-lel közös [6] dolgozatunkban bebizonyítjuk, hogy a tipikus megfigyelhető mennyiségekre nemstandard határeloszlástétel teljesül, a Birkhoff összegek – a centrális határeloszlástételben megszokott $\sqrt{n}$ normálás helyett – csak az erősebb $\sqrt{n \log n}$ normálás után konvergálnak a normális eloszláshoz (nagyobb fluktuációk). A [6] dolgozat első felében kidolgoztunk egy azóta más rendszerekre is sikerrel alkalamazott általános módszert, amely a Young féle torony konstrukcióból kiindulva kezeli a nemstandard határeloszlástétel kérdését. A dolgozat második felében a stadion biliárd egy korábbiaknál finomabb geometriai analízisét adjuk, ezzel lehetőséget teremtve a módszer alkalmazására.

A stadion modellek mellett gyengén hiperbolikus biliárd rendszerek két további fontos családját emelném ki: a végtelen horizontú szóróbiliárdokat, valamint a szóróbiliárdokat cusp-pal. A *végtelen horizont* esetéről én ugyan nem közöltem dolgozatokat, jelentőségük miatt azonban mégis fontosnak tartom, hogy néhány eredményt megemlítsek. Ebben az esetben a lassú keverés (és a normálisnál erősebb fluktuációk) az ún. folyosókhoz kapcsolódik, melyekben a biliárd részecske korlátlan hosszú ideig repülhet ütközés nélkül. A stadionhoz hasonlóan itt is $\sqrt{n \log n}$ a megfelelő normálás, a nemstandard határeloszlástétel bizonyítása Szász Domokos és Varjú

Tamás nevéhez fűződik ([30]). Nikolai Chernov és Dmitry Dolgopyat a [20] dolgozatban azt vizsgálja, miképp módosítja a dinamikát, ha a szabad repülés helyett a részecske pályáját egy kicsi, ε nagyságú, a folyosók irányára transzverzális elektromos tér hatásának tesszük ki. A tér a részecske pályáját lassan kifordítja a folyosóból, így az ütközésmentes repülés hossza korlátossá válik, és minden pozitív ε-ra centrális határeloszlástételt kapunk; a szórás azonban végtelenhez tart, amint $\varepsilon \to 0$. [20]-ben a szórás felrobbanásának pontos asszimptotikáját adják a szerzők.

Cusp alatt azt a jelenséget értjük, amikor egy szóróbiliárd tartományban két szigorúan konvex szorótest érintkezik. A kvadratikus rendű érintés közelében kialakuló tartományban a biliárd részecske korlátlan sok egymás utáni ütközését figyelhetjük meg (bár az ütközések között eltelt idő ilyenkor egyre rövidebb, erről részletesebben írok lent [9] ismertetésénél). A Cusp rendszerek tárgyalása technikai szempontból igen nehéz, az ergodicitást is csak a 90-es években igazolta Jan Reháček ([28]). Nikolai Chernov és Roberto Markarian [22]-ben bizonyították, hogy a korrelációlecsengés üteme $1/n$. A nemstandard határeloszlástételhez szükséges további geometriai analízist Nikolai Chernov-val és Dmitry Dolgopyat-tal közös kutatásaim során lényegében elvégeztük. [20] mintájára további vizsgálatokba is belekezdtünk, ezek tárgya egy olyan biliárd konfiguráció, amelyben a szórótestek nem érintkeznek, de a köztük levő ε távolság tetszőlegesen kicsi lehet. Rögzített ε mellett itt is centrális határeloszlástétel teljesül, célunk a szórás (fizikus szempontból, a diffúziós együttható) felrobbanásának pontos asszimptotikáját megadni, amint $\varepsilon \to 0$. Eredményeink közlését a [5] dolgozatban tervezzük.

Fontos megjegyezni, hogy a fent ismertetett eredmények mindegyike a diszkrét idejű biliárd dinamikára vonatkozik (a rendszer állapotát az ütközési pillanatokban vizsgáljuk). Folytonos időben a viselkedés ettől eltérő lehet, például a cusp rendszerben a lassú keverést okozó ütközési sorozatokhoz rendkívül rövid repülési idők tartoznak. Ezt a jelenséget vizsgáltuk Ian Melbourne-nel közösen: bebizonyítottuk, hogy *folytonos időben a cusp dinamikára szuperpolinomiális* ütemben (minden hatványfüggvénynél gyorsabban) csengenek le a korrelációk. A [9] dolgozatban igazoljuk tovabbá a folytonos idejű cusp dinamikára a majdnem biztos invariancia elvet (a centrális határeloszlástétel egy igen erős, funkcionális változatát), valamint más biliárd modellek folytonos idejű viselkedését is tárgyaljuk. Érdemes megjegyezni, hogy a folytonos idejű viselkedés tárgyalása technikailag igen nehéz, az éles becslések rendkívül pontos analízist igényelnek. Ehhez kapcsolódik, hogy mindmáig még a legegyszerűbb (kétdimenziós, véges horizontú, cusp-mentes) szóróbiliárdok folytonos idejű korrelációlecsengésére sem sikerült igazolni az optimálisnak tartott exponenciális becslést. Mindez összefügghet azzal, hogy a rendszer szimbolikus dinamikai kódolása során túl sok információt vesztünk, és külön motivációt jelenthet a közvetlen módszerek (pl. [3] és [2] Banach teres technikái) további tanulmányozására.

Végezetül kitérnék a *tökbiliárdok kétparaméteres család*jának vizsgálatával kapcsolatos eredményeimre, melyek bevezetéséhez a Bunimovich stadion két, az irodalomból ismert perturbációja adta számomra a motivációt. A ferde stadionban a két egységsugarú félkört egy egynél nagyobb sugarú, félkörnél hosszabb, valamint egy egynél kisebb sugarú, félkörnél rövidebb körívre cseréljük, melyeket ezúttal nem párhuzamos, egyenes szakaszokkal kötünk össze. Ennek a ferde stadionnak a a Bunimovich stadionéhoz hasonló ergodikus tulajdonságai jól ismertek ([23]). Az ovális biliárdokat négy, páronként azonos sugarú körív határolja, melyek egy négyzet négy csúcspontjában közös érintővel találkoznak. A szemközti körív-párok görbületének változtatásával kapott egyparaméteres biliárdcsaláddal folytonosan transzfromálhatjuk a Bunimovich stadiont a teljesen integrálható körbiliárdba. Ezeket a rendszereket még a 80-as években vizsgálta Benettin és Strelczyn, valamint Hénon és Wisdom numerikusan ([15],[27]). Fontos észrevételük volt, hogy amint az összekötő szakaszok görbülete pozitív (ha csak egy kicsit is eltérünk a Bunimovich stadiontól), a rendszer nem ergodikus. Ez az ívek felezőpontja között pattogó kettő periódusú pálya körül kialakuló KAM sziget megjelenésével magyarázható.

A tökbiliárdok kétparaméteres családját úgy kapjuk, hogy az ovális biliárdok bevezetésénél látott perturbációt a ferde stadionra alkalmazzuk. A $0 < b \leq 1$ paraméter a stadion ferdeségét, az $1 \leq c \leq \infty$ paraméter az összekötö ívek görbültségét indexeli ($(b, c) = (1, \infty)$ felel meg a Bunimovich stadionnak). A $b < 1$ esetben jelentkező lényeges újdonság, hogy ha $c = \infty$, az egyenes összekötő szakaszok pozitív szöget zárnak be, így nem alakul ki köztük kettő periódusú pálya. Ennek megfelelően elég nagy, de véges c paraméter esetén KAM szigetek sem alakulnak ki: így ergodikus konvex biliárdok egy új csoportjára találhatunk. Halázs Miklós fizikus hallgatóval dolgoztunk ezen a témakörön. Számítógépes szimulációkkal és heurisztikus érvelésekkel támasztottuk alá a $b < 1$-re már véges c-nél is jelentkező ergodicitást, a paramétertér más tartományaiban pedig érdekes bifurkációs jelenségeket találtunk. Halász Miklós témavezetésem mellett ezekről az eredményekről TDK dolgozatában ([25]) illetve diplomamunkájában ([26]) számolt be. Az eredmények közlését folyóiratcikkben is tervezzük, ennek kézirata a honlapomról elérhető ([7]).

4. Statisztikus fizikai problémák

A beszámoló utolsó fejezetében statisztikus fizikai problémák közvetlen vizsgálatára vonatkozó kutatásaimra térnék ki. Ahogy azt már az 1 fejezetben is említettem, ezen a területen sokszor célszerű a modellezéshez a kaotikus biliárdoknál egyszerűbb rendszereket használni. Így kevesebb technikai nehézséggel kell megküzdeni, könnyebben eljuthatunk a jelenségek közvetlen tanulmányozásáig. Kutatásaim két csoportját végeztem ebben a szellemben. Mielőtt ezek ismertetésére rátérnék, megemlíteném, hogy a pályázat időtartama alatt végzett kutatásokkal közelebb kerültünk a kaotikus biliárdok közvetlen alkalmazásához is néhány statisztikus fizikai problémában. Gondolok itt elsősorban a a 3 fejezetben említett cusp problémára, ezen belül is [5] vizsgátataira az $\varepsilon \to 0$ viselkedésről. Érdemes megemlíteni például Dmitry Dolgopyat és Nikolai Chernov [19] dolgozatát, itt egy Q biliárd tartományban egy nehéz (pozitív sugarú, M tömegű) és egy könnyű (pontszerű, egységnyi tömegű) részecske mozgását vizsgálják az $M \to \infty$ esetben. A lényegesen lassabban mozgó nagy részecske minden rögzített helyzete mellett a kis részecske egy szóróbiliárd tartományban mozog, ennek a dinamikának a statisztikus tulajdonságai pedig egy a nagy részecske mozgását leíró sztochasztikus differenciálegyenletre vezetnek. Mindez a Brown mozgás egy dinamikai elméletének is tekinthető. [19] korszakalkotó tárgyalása kezeli a problémát mindaddig, amíg a nagy részecske a tartomány ∂Q falával ütközik. A fallal való ülközés leírásához viszont éppen a cusp probléma (pontosabban, az $\varepsilon \to 0$ határeset) tanulmányozása adhatja a kulcsot.

[19] eredményeihez is kapcsolódnak Tóth Bálinttal és Tóth Imre Péterrel közös kutatásaim a Rayleigh gázról. Rayleigh gáz alatt egy egydimenziós végtelen részecskerendszert értünk, melyben a részecskék egyenes vonalú egyenletes mozgást végeznek, szomszédaikkal rugalmasan ütköznek, és a megjelölt (M tömegű) részecske kivételével egységnyi tömegűek. Az irodalom részletesen foglalkozik a jelölt részecske asszimptotikus szórásának kérdésével; ennek értéke $M = 1$ esetén pontosan ismert. Sokan arra számítottak, hogy ugyanezt az értéket kapjuk vissza az általunk is vizsgált $M \to 0$ határesetben, ezt azonban a numerikus vizsgálatok ([16]) nem támasztották alá. Kutatásainkban az $M \to 0$ esetet visszavezettük egy olyan egydimenziós

rendszer vizsgálatára, amelyben két kitüntetett szomszédos részecske között taszító potenciál hat. Az új modellt matematikailag szigorú eszközökkel, valamint számítógépes szimulációkkal vizsgálva érdekes, a korábbi kutatásokat (kokrétan [16] numerikus eredményeit) új megvilágításba helyező eredmények adódtak a jelölt részecske asszimptotikus szórásával kapcsolatban. Eredményeinket a [14] folyóiratcikkben közöltük.

Végül, de nem utolsósorban Kevin Linnel és Lai-Sang Young-gal közös kutatásaimról számolok be. Ezeknek a vizsgálatoknak a tárgya hővezetési jelenségek modellezése egyszerű dinamikai rendszerek egydimenziós láncával. Konkrétan egy tisztán determinisztikus időfejlődésű rendszert vizsgáltunk, melynek integrálhatóságát pusztán a véletlen határfeltételek – a lánc két végén elhelyezett hőtartályok – törik meg. A rendszert alkotó részecskék két típusát különböztetjük meg: a rácspontokon rögzített, valamint a két szomszédos rácspont között egyenes vonalú egyenletes mozgást végző részecskéket. A rögzített és a mozgó részecskék találkozásakor teljes energiacsere történik, ez adja a modell integrálható jellegét. Ennek ellenére, a hőtartályok peremfeltételként jelentkező hatása alapvetően meghatározza a vislekedést: természetes feltételek mellett sikerült belátnunk az invariáns mérték egyértelműségét és ergodicitását. Ez a statisztikus fizikai vonatkozások mellett önmagában, mint dinamikai rendszerek véletlen perturbációira vonatkozó eredmény is érdekes. Matematikailag szigorú eredményeinket a nem-egyensúlyi energiaeloszlásra és a térbeli korrelációkra vonatkozó számítógépes szimulációkkal egészítettük ki. Érdemes kiemelni a lokális termikus egyensúly sérülésére vonatkozó meglátásunkat: nem egyensúlyi, exponenciális eloszlású hőtartályok esetén a termodinamikai határesetben ugyan lokális szorzatszerkezetet figyelhetünk meg, a marginálisok azonban nem rögzített hőmérséklethez tartotó exponenciális eloszlásokkal, hanem a két hőtartály eloszlásának alkalmas konvex kombinációival közelíthetőek. Mindez jól magyarázható a teljes energiacsere mechanizmusával, fizikai szempontból mégis érdekes észrevételnek számít. Eredményeinket a [8] dolgozatban közöltük.

Hivatkozások

[1] P. Bachurin, P. Bálint and I. P. Tóth; *Local ergodicity for systems with growth properties including multi-dimensional dispersing billiards*; Israel Journal of Mathematics, **167** (2008) 155–176.

[2] V. Baladi, P. Bálint, S. Gouëzel; *A new proof of exponential mixing in* 2*d Sinai billiards*; in preparation

[3] V. Baladi and S. Gouëzel; *Good Banach spaces for piecewise hyperbolic maps via interpolation*, Annales de l'Institut Henri Poincaré, Analyse non linéaire **26** (2009) 1453–1481

[4] V. Baladi and S. Gouëzel; *Banach spaces for piecewise cone hyperbolic maps*, manuscript, `http://www.dma.ens.fr/~baladi/pwch.pdf`

[5] P. Bálint, N. Chernov and D. Dolgopyat; *Statistical properties of dispersing billiards with almost cusp*; in preparation

[6] P. Bálint P. and S. Gouëzel; *Limit theorems in the stadium billiard*; Communications in Mathematical Physics **263** (2006) 461–512.

[7] P. Bálint and M. Halász; *Chaos and stability in a two parameter family of convex billiard tables*; manuscript, `http://www.math.bme.hu/~pet/pub/tok3.pdf`

[8] P. Bálint, K. Lin and L.-S. Young; *Ergodicity and Energy Distributions for some Boundary Driven Integrable Hamiltonian Chains*; Communications in Mathematical Physics **294** (2010) 199–228.

[9] P. Bálint and I. Melbourne; *Decay of correlations and invariance principles for dispersing billiards with cusps, and related planar billiard flows* Journal of Statistical Physics, **133** (2008) 435–447.

[10] P. Bálint and I.P. Tóth; *Hyperbolicity in multi-dimensional Hamiltonian sytems with applications to soft billiards*; Discrete and Continuous Dynamical Systems, Series A, **15** (2006) 37–59.

[11] P. Bálint and I.P. Tóth; *Exponential decay of correlations in multi-dimensional dispersing billiards*; Annales Henri Poincaré, **9** (2008) 1309–1369.

[12] P. Bálint and I.P. Tóth; *An Application of Young's Tower Method: Exponential Decay of Correlations in Multidimensional Dispersing Billiards*; Erwin Schrödinger Institut Preprint **2084** (2008); `http://www.esi.ac.at/Preprint-shadows/esi2084.html`

[13] P. Bálint and I.P. Tóth; *Example of exponential complexity for the singularity set in a 3-dimensional dispersing billiard*; in preparation

[14] P. Bálint, B Tóth and I.P. Tóth; *On the zero mass limit of tagged particle diffusion in the 1-d Rayleigh gas*; Journal of Statistical Physics, **127** (2007) 657–675.

[15] G. Benettin and J.-M. Strelcyn; *Numerical experiments on the free motion of a point mass moving in a plane convex region: Stochastic transition and entropy*; Phys. Rev. A **17(2)** (1978) 773–785.

[16] C. Boldrighini, G. C. Cosimi, S. Frigio;*Diffusion and Einstein relation for a massive particle in a one-dimensional free gas: numerical evidence*; Journal of Statistical Physics **59** (1990) 1241–1250.

[17] L. Bunimovich; *On ergodic properties of nowhere dispersing billiards*; Communications in Mathematical Physics **65** (1979) 295–312.

[18] N. Chernov; *Decay of correlations in dispersing billiards* Journal of Statistical Physics, **94** (1999) 513–556.

[19] N. Chernov and D. Dolgopyat; *Brownian Brownian Motion - I.* Memoirs of American Mathematical Society, 198, No 927 (2009), 193 pp.

[20] N. Chernov and D. Dolgopyat; *Anomalous current in periodic Lorentz gases with infinite horizon*; Russian Mathematical Surveys, **64** (2009) 651–699.

[21] N. Chernov and R. Markarian; *Chaotic billiards,* Mathematical Surveys and Monographs **127** AMS Publishing Providence, RI, 2006. xii+316 pp.

[22] N. Chernov and R. Markarian; *Dispersing billiards with cusps: slow decay of correlations,* Comm. Math. Phys. **270** (2007) 727–758.

[23] N. I. Chernov and H.-K. Zhang; *Billiards with polynomial mixing rates*; Nonlinearity **18** (2005) 1527–1553.

[24] N. Chernov, H.-K. Zhang; *Improved estimates for correlations in billiards,* Comm. Math. Phys. **277** (2008) 305–321.

[25] M. Halász; *Kétparaméteres konvex biliárdcsalád vizsgálata*; TDK dolgozat, 2006 `http://www.renyi.hu/~bp/pub/hmtdk.pdf`

[26] M. Halász; *Kevert fázisterű, konvex, kétparaméteres biliárdcsalád vizsgálata*; Diplomamunka, 2007 `http://www.renyi.hu/~bp/pub/diploma_070530.pdf`

[27] M. Hénon and J. Wisdom; *The Benettin-Strelcyn oval billiard revisited*, Physica D **8** (1983) 157–169.

[28] Reháček J. *On the ergodicity of dispersing billiards,* Rand. Comput. Dynam. **3** (1995) 35–55.

[29] Ya. Sinai; *Dynamical systems with elastic reflections. Ergodic properties of dispersing billiards*, Russian Mathematical Surveys **25** (1970), 137–189.

[30] D. Szász and T. Varjú; *Limit Laws and Recurrence for the Planar Lorentz Process with Infinite Horizon*; Journal of Statistical Physics **129** (2007) 59–80

[31] L.-S. Young; *Statistical properties of dynamical systems with some hyperbolicity*, Annals of Mathematics **147** (1998) 585–650.