Szakmai Beszámoló

Az OTKA T049727

A Valós Analízis Dinamikai és Geometriai Mértékelméleti Vonatkozásai című pályázatról

Tudományos eredmények:

1. Többváltozós valós analízis, tipikus tulajdonságok: A gradiensprobléma a Valós Analízis egy jól ismert és híres megoldatlan problémája volt. A 60-as évektől dolgoztak rajta. 15 éven keresztül, hosszabb-rövidebb intenzívebb munkaperiódusok után félretettem, majd amikor valami újat tanultam ismét elővettem.

A gradiensprobléma megoldása végül egy kétdimenziós ellenpéldafüggvény konstrukciója. A pályázat futamideje alatt megjelent [1] cikkben lényegében a következő tételt látom be:
Található olyan $f : G \to \mathbb{R}$, valamely $G \subset \mathbb{R}^2$ nyílt halmazon értelmezett differenciálható függvény és egy $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^2$ nyílt halmaz, hogy valamely $\mathbf{p} \in G$-re $\nabla f(\mathbf{p}) \in \Omega_1$, de a kétdimenziós Lebesgue mérték, λ_2, szerint majdnem minden $\mathbf{q} \in G$-re a gradiens $\nabla f(\mathbf{q})$ nincs Ω_1-ben.

Általában a nagy publikációs átfutási idők miatt egy négyéves pályázat esetén sem találni túl sok megjelent hivatkozást a pályázat által támogatott közleményekre, de ezúttal úgy tűnik, hogy a probléma érdekessége miatt viszonylag hamar 5 db folyóirat cikk, 1 db habilitációs értekezés és 1 preprint független hivatkozást kaptam rá. E zárójelentés végén megadok egy, a pályázat támogatásával megjelent közleményekre vonatkozó hivatkozási listát is.

A gradiensprobléma megoldásáról, történetéről és annak heurisztikus hátteréről tartottam előadást a BIG 5 konferencián. Ennek az előadásnak anyaga található a [4] publikációban.

A [2] cikkben U. B. Darji-val egy Bruckner-Garg típusú tételt bizonyítunk kétdimenziós tipikus folytonos függvények szinthalmazairól, azaz
$f \in C(S^2, [0,1])$, függvények esetén az $f^{-1}(y)$, $y \in [0,1]$ halmazok tulajdonságait vizsgáljuk. Megmutatjuk, hogy ha a felülről félig folytonos topológiát használjuk a $Comp(f^{-1}(y))$ halmazokon, azaz az $f^{-1}(y)$ komponensein, akkor érvényben marad a Bruckner-Garg féle egydimenziós tétel. Ezenkívül megmutatjuk, hogy a tipikus $f \in C(S^2, [0,1])$ függvényre minden

nem degenerált $Comp(f^{-1}(y))$-hez tartozó komponens kompaktum „nyolcasszerű". Bizonyítjuk, továbbá, hogy az $f^{-1}(y)$ halmazok pszeudoíveket, pszeudoköröket, illetve „Wada-tavakat" tartalmaznak. Ez utóbbiak felmerülését tartom a legérdekesebbnek, hiszen a tipikus folytonos függvények túl „vadul" viselkednek ahhoz, hogy nyeregpontjaik legyenek és ezek helyére lép, a minden pontjában egyszerre három tartományt határoló „Wada-tó" kompaktum az $f^{-1}(y)$ halmazban.

Ráti Csaba doktorandusszal közösen írt [7] cikkben tipikus $C[0,1]$-beli folytonos függvények mikro-tangens halmazainak vizsgálatát folytattuk. Beláttuk, hogy a szinthalmazok egy tipikus pontjában teljesül a kétoldali vertikális univerzalitási tulajdonság. A szinthalmazok egyoldali torlódási pontjaiban az egyoldali vertikális univerzalitási tulajdonság teljesül kivéve α-k egy nulla Hausdorff dimenziós kivételes halmazát, amikoris az $L_{\alpha,f}$ szinthalmaz egyetlen kivételes egyoldali torlódási pontot tartalmaz, melyben nem teljesül az egyoldali vertikális univerzalitási tulajdonság. A tipikus folytonos függvények szinthalmazai Bruckner-Garg karakterizációját használva az $f_\gamma(x) = f(x)+\gamma x$, $(\gamma \in \mathbb{R})$ függvények lokális szélsőértékhelyeiben vizsgáljuk a mikro-tangens halmazokat és megmutatjuk, hogy a tipikus $f \in C[0,1]$ függvényre tetszőleges $\gamma \in \mathbb{R}$ esetén az f_γ függvény tetszőleges lokális szélsőértékhelyén teljesül a fél-univerzalitási tulajdonság.

2. Dinamikus rendszerekhez, Ergodelmélethez kapcsolódó kérdések:

D. Mauldinnal 2003-ban J. Bourgain egy híres ergodelméleti kérdésével kezdtünk foglalkozni. A pályázat teljes futamidején végighúzódnak a „Divergent square averages" című munkánk elfogadtatása körüli erőfeszítések. Az eredmény meglehetősen bonyolult, több átdolgozáson ment át a kézirat az elmúlt 4 évben 50-ről 60 oldalra hízott. Cikkünket csak most, 2009 május végén fogadták el és megjelenése még évekig elhúzódhat, így ezt nem adtam meg a közlemény listán, helyette a már megjelent [8] cikk szerepel, melyben igyekszünk módszerünk technikai részletek miatt nehezen megközelíthető heurisztikus hátterét könnyebben hozzáférhetővé tenni.

Az eredmény nemzetközi elfogadását jelenti, hogy társszerzőmmel felkérést kaptunk 50 perces előadás tartására (ld. az előadások listáján az [E14] előadást) egy nagy, a témakörbe eső nemzetközi konferencián, ahol a 150-nél több résztvevő közül csak 22-t kértek fel előadás tartására. Mint a hivatkozási lista jelzi, egy Berkeleyben dolgozó doktorandusz már két preprintjében is hivatkozik erre a cikkünkre. A „Divergent square averages" fő eredménye az, hogy megmutatjuk, hogy a $\{k^2\}_{k=1}^{\infty}$ sorozat L^1-univerzálisan rossz. Egy $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ sorozat L^1-univerzálisan rossz, ha minden aperiodikus ergodikus (X, Σ, μ, T) dinamikus rendszerben található $f \in L^1$, hogy

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f(T^{n_k}x)$$

divergál egy pozitív mértékű halmazon.

A fenti négyzetek menti konvergenciaproblémához kapcsolódik a következő [9] cikkben tárgyalt eredmény, mely a témakör egy másik jól ismert megoldatlan problémáját válaszolja meg. Sikerült olyan (n_k) sorozatot konstruálnom, melyre $n_{k+1} - n_k \to \infty$, de tetszőleges (X, Σ, μ, T) ergodikus dinamikus rendszerre és $f \in L^1(\mu)$ függvényre a nem konvencionális $(1/N)\sum_{k=1}^{N} f(T^{n_k}x)$ ergodikus átlagok $\int_X f d\mu$-hez konvergálnak μ majdnem minden x-re.

Mivel a fenti sorozat nulla Banach sűrűségű, J. Rosenblatt és M. Wierdl egy sejtését is sikerült így megcáfolnom.

Még 2003-ban a divergens négyzetek menti ergodikus közepekről a University of Maryland-en tartott egyik előadásom után kezdtem meg az együttműködést I. Assani-val. A divergens négyzetek kezelésére kifejlesztett módszer itt újabb alkalmazásokat talált, I. Assanival és D. Mauldinnal közösen írt [3] cikkünkben I. Assani egy problémáját oldjuk meg és egyben választ adunk egy másik Bourgain eredménnyel kapcsolatos kérdésre is. Egyebek között megmutatjuk, hogy található olyan nemnegatív integrálható függvény f, melyre

$$\sup_n \frac{N_n f(x)}{n} < \infty$$

majdnem mindenütt, ahol

$$N_n f(x) = \#\Big\{k\colon \frac{f(T^k x)}{k} > \frac{1}{n}\Big\}.$$

A 2005-ben megjelent [3] cikknek már most is jelentős nemzetközi visszhangja van, mint a hivatkozási listán is látható 8 db megjelent cikk és 1 db preprint hivatkozást találtam rá. J. Rosenblatt a Mathematical Reviews-ban ezt írja róla: „In this important and interesting paper, the authors solve a conjecture of Idris Assani, that a certain counting function does not behave well in L^1."

Mint az előadáslistán látható ([E1], [E3], [E8], [E12]) az I. Assani által Chapel Hillben szervezett Ergodelmélet konferenciákon jelen pályázat részleges támogatásával rendszeresen részt vettem és I. Assanival több közös cikket is írtam. Legyen $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ atommentes véges mértéktéren értelmezett ergodikus dinamikus rendszer. Tekintsük az

$$R^* : (f, g) \in L^p \times L^q \to R^*(f, g)(x) = \sup_n \frac{f(T^n x)g(T^{2n} x)}{n}$$

maximális függvényt. A még 2008-ban elfogadott, jelenleg megjelenésre váró [11] cikkben megmutatjuk, hogy ha $p = q = 1$ akkor találhatunk olyan f és g függvényeket, hogy $R^*(f, g)(x)$ nem lesz majdnem mindenütt véges. A

$$\mathcal{M}(f, g)(x) = \sup_N \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} f(T^n x)g(T^{2n} x)$$

átlagokat Fürstenberg átlagoknak nevezik, mivel Fürstenberg egy 1977-es cikkében szerepeltek először. J. Bourgain egy mély eredménye szerint a fenti átlagok majdnem mindenütt konvergensek ha $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq 1$. A [11] cikk eredményéből következik, hogy $p = q = 1$ esetén nincs mindig majdnem mindenütt vett konvergencia.

J. P. Conze által, az előbb már említett chapel hill-i konferencián felvetett egyik kérdésre adunk választ a [12] cikkben. Tekintsük ismét az előző bekezdésben definiált $R^*(f, g)$ függvényt. A következő maximális egyenlőtlenséget bizonyítjuk: Ha $1 < p \leq \infty$ akkor található olyan véges C_p állandó, hogy minden $\lambda > 0$-ra és nemnegatív $f \in L^p$ és $g \in L^1$ függvényre

$$\mu\{x : R^*(f, g)(x) > \lambda\} \leq C_p \left(\frac{\|f\|_p \|g\|_1}{\lambda} \right)^{1/2}.$$

Azt is megmutatjuk, hogy minden $\alpha > 2$-re az $R^*(f, g)$ maximális függvény majdnem mindenütt véges, ha $(f, g) \in (L(\log L)^{2\alpha}, L^1)$.

A fenti témakörökről 2008-ban Chicago-ban tartott meghívott [E9] „Gibson" előadásom tartalmi kivonatát a Real Analysis Exchange szerkesztői „előléptették" önálló folyóiratcikké, így született a [13] publikáció.

3. Geometriai Mérték és Integrálelmélet Valós Analízisbeli vetülete:

Máthé András doktorandusszal közös [6] cikkem eredményei vázlatosan a következők: Tegyük föl, hogy $F \subset [0,1]$ zárt. Igaz-e, hogy a tipikus $C^1[0,1]$-beli függvény injektív F-en? Ha F alsó dobozdimenziója, $\underline{dim}_B F < 1/2$ akkor megmutatjuk, hogy e kérdésre a válasz igenlő. Másrészt, konstruálunk olyan zárt F halmazt, melyre $dim_B F = 1/2$ és kérdésünkre a válasz nemleges. Ha C_α a szimmetrikus-α Cantor halmaz, akkor megmutatjuk, hogy kérdésünkre a válasz akkor és csak akkor igenlő, ha $dim(C_\alpha) \leq 1/2$. Belátjuk, hogy találhatók olyan egy Hausdorff dimenziós F-ek, melyekre a válasz még mindig igenlő. E cikk a 2004-es Schweitzer verseny egy általam kitűzött feladatához kapcsolódott. A 2006-os Schweitzer versenyen a következő feladatot tűztem ki:

Tegyük föl, hogy $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}||2^n x||$, ahol $||x||$ az x legközelebbi egész számtól vett eltérése (azaz f a Takagi függvény). Mi mondható Lebesgue majdnem minden $y \in f(\mathbb{R})$-re az

$$L_y = \{x \in [0,1] : f(x) = y\}$$

szinthalmaz számosságáról?

Meglepőnek tűnhet, hogy a válasz az, hogy véges. Ez a Schweitzer feladat is további kutatómunkában folytatódott. Erről szól a [10] cikk. Viszonylag természtesen definiálhatunk a Takagi-függvény grafikonján egy S_{irr} irreguláris 1-halmazt, melynek a grafikonra vett komplementere egy S_{reg} halmaz, mely lefedhető megszámlálható sok monoton függvény grafikonjával és egy nulla egydimenziós Hausdorff mértékű halmazzal. Belátható, hogy S_{irr} vetülete az y-tengelyre nulla Lebesgue mértékű, míg vetülete az x-tengelyre teljes mértékű. Az S_{reg} halmaz „felelős" a véges metszetű szinthalmazokért. Ez az eredmény természetesen vezet az úgynevezett tartózkodási mérték $\mu(A) = \lambda(f^{-1}(A))$ vizsgálatához. Eredményünkből következik, hogy μ tisztán szinguláris.

A tipikus folytonos függvények esetén az univerzális mikrotangens pontok halmaza, $UMT(f)$ definiál természetesen egy irreguláris 1-halmazt. $UMT(f)$ minden az y tengelytől független irányba vett vetülete nulla Lebesgue mértékű és a tipikus folytonos függvény tartózkodási mértéke is szinguláris.

A Weierstrass típusú (Cellerier) seholsem differenciálható fraktál függvényt a következő Fourier sorokon alapuló képlet adja meg:

$$\mathcal{W}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \sin(2^n x).$$

Természetes kérdés annak vizsgálata, hogy mit mondhatunk e függvény szinthalmazairól és tartózkodási mértékéről?

E függvény grafikonján ismét megadhatunk egy természetesen definiált irreguláris 1 halmazt és beláthatjuk, hogy a $\mathcal{W}(x,c) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{W}(x)+cx$ tartózkodási mértéke majdnem minden c-re tisztán szinguláris, és szinthalmaza majdnem minden y-ra véges.

Jelen OTKA pályázat valamennyi témaköréhez kapcsolódott a 2006-ban írt és 2007-ben sikeresen megvédett „Geometric and Dynamical Aspects of Measure Theory" című MTA Doktori Értekezésem [5].

Konferenciaszervezés:

Részben ez az OTKA pályázat is támogatta az általam 2008 februárjában szervezett „M60 A miniconference in Real Analysis" konferenciát, melynek apropója Laczkovich Miklós hatvanadik születésnapja volt.

Meghívott vendégkutatók:

A pályázat futamideje alatt két vendégkutatót hívtam meg. Mindegyikük kb. 1 hetet tartózkodott Budapesten és előadást tartott a tanszéki szemináriumunkon:

2006 június: D. Mauldin (University of North Texas) előadás: Divergent square averages.

2009. április: S. Seuret (Université Paris XII-Val de Marne) előadás: A Markov process with random singularity spectrum

Közleményjegyzék:

[1] Buczolich, Zoltán; Solution to the gradient problem of C. E. Weil., Rev. Mat. Iberoamericana 21 (2005), no. 3, 889-910., 2005

[2] Buczolich, Zoltán; Darji, Udayan B: Pseudoarcs, pseudocircles, Lakes of Wada and generic maps on S^2., Topology Appl. 150 (2005), no. 1-3, 223–254., 2005

[3] I. Assani, Z. Buczolich and D. Mauldin: An L^1 Counting problem in Ergodic Theory, J. Anal. Math. 95 (2005), 221–241, 2005

[4] Buczolich Z.: A Gradiensprobléma, Matematikai Lapok, Új sorozat 11. évf. (2002-2003), 1, (2006), 56-71., 2006

[5] Buczolich, Zoltán: Geometric and Dynamical Aspects of Measure Theory, MTA Doktori Értekezés, 2006

[6] Z. Buczolich and A. Máthé: Where are typical C^1 functions one-to-one?, Mathematica Bohemica, 131 No. 3, 291-303., 2006

[7] Z. Buczolich and Cs. Ráti,: Micro Tangent sets of typical continuous functions,, Atti. Semin. Mat. Fis. Univ. Modena Reggio Emilia, 54 (2006), 135-166, 2007

[8] Z. Buczolich and D. Mauldin: Concepts Behind Divergent Square Averages, Ergodic Theory and related Fields, Contemporary Mathematics, Vol. 430, 40-56., 2007

[9] Z. Buczolich,: Universally L^1 good sequences with gaps tending to infinity, Acta Math. Hungar., 117 (1-2) (2007), 91-40, 2007

[10] Buczolich, Zoltán: Irregular 1-sets on the graphs of continuous functions,, Acta Math. Hungar., 121 (4) (2008), 371-393., 2008

[11] I. Assani and Z. Buczolich: The (L^1, L^1) bilinear Hardy-Littlewood function and Furstenberg averages, közlésre elfogadva Rev. Mat. Iberoamericana, 2009

[12] I. Assani and Z. Buczolich: A maximal inequality for the tail of the bilinear Hardy-Littlewood function, Ergodic Theory, 7–11, Contemp. Math., 485, Amer. Math. Soc., Providence, RI,, 2009

[13] Z. Buczolich: Almost everywhere convergence of ergodic averages, Real Anal. Exchange Volume 34, Number 1 (2008), 1-16, 2009

Hivatkozási lista a közleményjegyzékben szereplő dolgozatokra:

[1] Buczolich, Zoltán; Solution to the gradient problem of C. E. Weil., Rev. Mat. Iberoamericana 21 (2005), no. 3, 889-910., 2005
Hivatkozza:

1. Malý, J.; Zelený, M. A note on Buczolich's solution of the Weil gradient problem: a construction based on an infinite game. Acta Math. Hungar. 113 (2006), no. 1-2, 145–158. SCI

2. M. Zelený, The Denjoy-Clarkson property with respect to Hausdorff measures for the gradient mapping of functions of several variables, Annales de l'institut Fourier, 58 (2): 405-428 2008.

3. Deville, Robert; On the range of the derivative of a smooth function and applications. RACSAM Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Mat. 100 (2006), no. 1-2, 63–74.

4. Deville, R.; Matheron, É.; Infinite games, Banach space geometry and the eikonal equation. Proc. Lond. Math. Soc. (3) 95 (2007), no. 1, 49–68. SCI

5. Deville, Robert; Jaramillo, Jesús A. Almost classical solutions of Hamilton-Jacobi equations. Rev. Mat. Iberoam. 24 (2008), no. 3, 989–1010. SCI

6. Michael Doré, Olga Maleva; A compact null set containing a differentiability point of every Lipschitz function, http://arxiv.org/abs/0804.4576

7. Etienne Matheron, Analyse fonctionnelle et théorie des ensembles, Habilitation Dissertation, L'Universite Bordeaux 1 (2005)
http://matheron.perso.math.cnrs.fr/recherche_fichiers/HDR-fin.pdf

[2] Buczolich, Zoltán; Darji, Udayan B: Pseudoarcs, pseudocircles, Lakes of Wada and generic maps on S^2., Topology Appl. 150 (2005), no. 1-3, 223–254., 2005
Hivatkozza:

1. Kato, Hisao, Higher-dimensional Bruckner-Garg type theorem. Topology Appl. 154 (2007), no. 8, 1690–1702. SCI

[3] I. Assani, Z. Buczolich and D. Mauldin: An L^1 Counting problem in Ergodic Theory,, J. Anal. Math. 95 (2005), 221–241, 2005
Hivatkozza:

1. C. Cuny, Addendum to 'On randomly weighted one-sided ergodic Hilbert transforms, Ergod. Th. and Dynam. Sys. (2005), 25, 101-106. SCI

2. C. Demeter and A. Quas, Weak-L1 estimates and ergodic theorems, New York J. Math. 10 (2004) 169-174.

3. C. Demeter, M. Lacey, T. Tao and C. Thiele, Breaking the duality in the return times theorem, Duke Mathematical Journal, 143 (2): 281-355 JUN 1 2008.

4. Demeter, Ciprian, Jones, Roger L., Besicovitch weights and the necessity of duality restrictions in the weighted ergodic theorem. Chapel Hill Ergodic Theory Workshops, 127–135, Contemp. Math., 356, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004.

5. Lin, Michael; Weber, Michel Weighted ergodic theorems and strong laws of large numbers. Ergodic Theory Dynam. Systems 27 (2007), no. 2, 511–543. SCI

6. Demeter, Ciprian; Randomly weighted series of i.i.d.'s in L^1. Ergodic Theory Dynam. Systems 26 (2006), no. 3, 711–717. SCI

7. Rosenblatt, Joseph; The mathematical work of Roger Jones. Topics in harmonic analysis and ergodic theory, 9–30, Contemp. Math., 444, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007.

8. G. Cohen and M. Lin; Almost sure convergence of weighted sums of independent random variables, Ergodic Theory, 13-44, Contemp. Math., 485, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009.

9. Ciprian Demeter, Improved range in the Return Times Theorem http://arxiv.org/abs/0904.1254

[4] Buczolich Z.: A Gradiensprobléma, Matematikai Lapok, Új sorozat 11. évf. (2002-2003), 1, (2006), 56-71., 2006

[5] Buczolich, Zoltán: Geometric and Dynamical Aspects of Measure Theory, MTA Doktori Értekezés, 2006

[6] Z. Buczolich and A. Máthé: Where are typical C^1 functions one-to-one?, Mathematica Bohemica, 131 No. 3, 291-303., 2006
Hivatkozza:

1. Karasińska, A.; Wagner-Bojakowska, E. Nowhere monotone functions and microscopic sets. Acta Math. Hungar. 120 (2008), no. 3, 235–248. SCI

[7] Z. Buczolich and Cs. Ráti,: Micro Tangent sets of typical continuous functions,, Atti. Semin. Mat. Fis. Univ. Modena Reggio Emilia, 54 (2006), 135-166, 2007

[8] Z. Buczolich and D. Mauldin: Concepts Behind Divergent Square Averages, Ergodic Theory and related Fields, Contemporary Mathematics, Vol. 430, 40-56., 2007
Hivatkozza:

1. Patrick LaVictoire; An L^1 Ergodic Theorem for Sparse Random Subsequences
http://front.math.ucdavis.edu/0812.3175

2. Patrick LaVictoire; L^1 Ergodic Theorems for Random Group Averages
http://front.math.ucdavis.edu/0808.0525

[9] Z. Buczolich,: Universally L^1 good sequences with gaps tending to infinity, Acta Math. Hungar., 117 (1-2) (2007), 91-40, 2007

Hivatkozza:

1. Urban, Roman; Zienkiewicz, Jacek Weak type $(1,1)$ estimates for a class of discrete rough maximal functions. Math. Res. Lett. 14 (2007), no. 2, 227–237. SCI

2. Rosenblatt, Joseph, The mathematical work of Roger Jones. Topics in harmonic analysis and ergodic theory, 9–30, Contemp. Math., 444, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007.

3. Patrick LaVictoire; An L^1 Ergodic Theorem for Sparse Random Subsequences
http://front.math.ucdavis.edu/0812.3175

4. Patrick LaVictoire; L^1 Ergodic Theorems for Random Group Averages
http://front.math.ucdavis.edu/0808.0525

[10] Buczolich, Zoltán: Irregular 1-sets on the graphs of continuous functions, Acta Math. Hungar., 121 (4) (2008), 371-393., 2008

[11] I. Assani and Z. Buczolich: The (L^1, L^1) bilinear Hardy-Littlewood function and Furstenberg averages, közlésre elfogadva Rev. Mat. Iberoamericana, 2009
Hivatkozza:

1. Ciprian Demeter, Improved range in the Return Times Theorem http://arxiv.org/abs/0904.1254

[12] I. Assani and Z. Buczolich: A maximal inequality for the tail of the bilinear Hardy-Littlewood function, Ergodic Theory, 7–11, Contemp. Math., 485, Amer. Math. Soc., Providence, RI,, 2009

[13] Z. Buczolich: Almost everywhere convergence of ergodic averages, Real Anal. Exchange Volume 34, Number 1 (2008), 1-16, 2009

Előadások:

Konferencia és tanszéki szemináriumi meghívott előadások:

[E1] Ergodic Theory Workshop, (2006, University of North Carolina, Chapel Hill), L^1 universally good and bad sequences, 50 perces meghívott előadás.

[E2] „Workshop on Ergodic Theory and Dynamical Systems” konferencia (Szklarska Porba, Lengyelország 2006, Június): L^1 universally good and bad

sequences
(Ez 20 perces előadás volt, de ezen a konferencián a tudományos bizottság csak az előadásra jelentkezők kb. harmadának fogadta el az előadását.)

[E2] Where are typical C^1 functions one-to-one, 50 perces előadás, melyet 2007 februárjában a University of North Texas, Millican Colloquium Series előadásssorozata keretében tartottam.

[E3] The bilinear Hardy-Littlewood function for the tail II, 50 perces meghívott előadás, 2007 február 'Probability and Ergodic Theory Workshop February 15-18, 2007" konferencia Chapel Hill, North Carolinában.

[E4] Universally L^1 good sequences with gaps tending to infinity, 50 perces meghívott előadás, melyet 2007 júniusában a „Visegrad Conference Dynamical Systems, High Tatras 2007" konferencián tartottam Szolvákiában.

[E5] Where are typical C^1 functions one-to-one, 50 perces előadás, melyet 2007 szeptemberében a „Fractals and Related Fields Conference in honor of Jacques Peyrière" konferencián tartottam Monastir, Tunéziában.

[E6] "Universally L^1 good sequences with gaps tending to infinity" 50 perces előadás, melyet 2008 februárjában a University of North Texas, Millican Colloquium Series előadásssorozata keretében tartottam.

[E7] "The (L^p, L^q) bilinear Hardy-Littlewood function for the tail" 50 perces előadás, melyet 2008 februárjában a University of North Texas, dinamikus rendszerek szemináriuma keretében tartottam.

[E8] Meghívott előadóként "Pointwise convergence and divergence results in L^1 I, II" címmel két 50 perces előadást tartottam a Probability and Ergodic Theory Workshop, Chapel Hill, North Carolina konferencián 2008 februárjában.

[E9] "32nd Summer Symposium of the Real Analysis Exchange" rendezvényen Chicagoban az 50 perces "Gibson előadást" tartottam "Pointwise convergence and divergence of Ergodic averages" címmel 2008 júniusában.

[E10] 2008 októberében az "Université Paris XII" szemináriumain két 50 perces előadást tartottam "Almost everywhere convergence of ergodic averages" és "Non-L^1 functions with rotation sets of Hausdorff dimension one" címekkel.

[E11] 2009 januárjában a University College London tanszéki szemináriumán (50 perces előadás): Non-L^1 functions with rotation sets of Hausdorff dimension one.

[E12] Meghívott előadóként "Non-L^1 functions with rotation sets of Hausdorff dimension one" címmel két 50 perces előadást tartottam a Probability and Ergodic Theory Workshop, Chapel Hill, North Carolina konferencián

2009 februárjában.

[E13] 2009 február, Washington and lee University, Lexington, Virginia tanszéki szeminárium (50 perces előadás): Non-L^1 functions with rotation sets of Hausdorff dimension one.

[E14] 2009 májusában a Párizsban tartott „A conference in ergodic theory Dynamical Systems and Randomness" konferencián „Divergent square averages" címmel tartottam előadást (itt társszerzőmmel Dan Mauldinnal osztoztunk meg az 50 perces előadási időn.) (http://ergodic2009.math.cnrs.fr/)

Magyarországon tartott fontosabb előadások:

[E15] Mi Laczkovich Miklós matematikája? 50 perces előadás, melyet 2007 decemberében a Bolyai János Matematikai társulat díjkiosztó ünnepségén tartottam abból az alkalomból, hogy Laczkovich Miklós Szele Tibor emlékdíjat kapott.

[E16] Számolás és konvergencia az Ergodelméletben, ezt a 80 perces előadást 2007 tavaszán két helyen is megtartottam. Először az ELTÉn tartott Valós függvénytan kutatószemináriumon, majd további érdeklődés miatt a BME dinamikus rendszerek szemináriumán is.

[E17] Tipikus C^1 függvények egyértelműségi halmazai, 80 perces előadás melyet az ELTÉn tartott Valós függvénytan kutatószemináriumon tartottam meg.

[E18] Az ELTE Matematika Intézet, Analízis Tanszék szemináriuma ill. Valós függvénytan kutatószeminárium kertében 2008 májusában "Ergodikus bilineáris Hardy-Littlewood maximális függvények" címmel tartottam szemináriumi előadást.

[E19] Az "ELTE-NUS (Singapore) Science Forum" keretében "Almost everywhere convergence of ergodic averages" címmel tartottam előadást 2008 májusában az előadás tartalmi kivonata az Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math. 50-ik kötetében meg fog jelenni.

[E20] Az ELTE Alkalmazott Analízis és Számításmatematikai Tanszék Szemináriuma keretében 2008 november végén és december elején két szemináriumi előadást tartottam "Ergodikus közepek majdnem mindenütt konvergenciája" címmel.

[E21] Császár Ákos 85. születésnapja tiszteletére 2009 márciusában rendezett „Topológia és Valós Függvénytan" konferencián előadást tartottam „Nem L^1-beli függvények 1 Hausdorff dimenziós forgatási halmazzal.

[E22] Móricz Ferenc 70. születésnapja alkalmából tartott „Sorok, függvények, véletlen változók, operátorok” Szegeden 2009 májusában tartott konferencián „Divergens ergodikus közepek négyzetek mentén” címmel tartottam előadást.

Budapest, 2009. június 30.

Buczolich Zoltán
egyetemi docens