Szingularitások vizsgálata és holomorf geometria

Zárójelentés

T49449

Szűcs Andrásnak sikerült belátni Kazarian egy sejtését, mely két, a szinguláris leképezések kobordizmuselméletében alapvető klasszifikáló tér között létesít kapcsolatot. Ez igen jelentős előrelépést eredményezett a szinguláris leképezések kobordizmuscsoportjainak kiszámolásában. Így például a tetszőleges Morin szingularitásokkal bíró leképezések kobordizmuscsoportjainak a rangját expliciten meghat ároztam, sőt egy gyűrű struktúrát is sikerült ezeken definiálni, amit szintén sikerült teljesen kiszámolni. (Ez utóbbit **Lippner Gábor**ral közösen.) Sikerült általános struktúratételeket belátni az említett klasszifikáló terekről. E csoportok torzióiról a következő részleges eredményt kaptam Terpai Tamással és Tobias Ekholmmal: "Nagy" primek nincsenek a torziócsoport rendjének osztói között. ("Nagy" prím az, ami nagyobb a sokaságok dimenziójának a felénél.) Kis prím komponensek viszont vannak, pl 3-nak tetszőlegesen nagy hatványa megjelenik ezen csoportok torziói között. Valójában sikerült teljesen meghatározni ezen csoportok közül a legegyszerűbbeket Terpai Tamással és Tobias Ekholmmal közös cikkben.

Némethi András és Szilárd Ágnes: A [Links and analytic invariants of superisolated singularities] cikk kettős célú: super-izolált felület szingularitások geometria genuszát és a szingularitások csomóinak Seiberg-Witten invariánsát számolja ki, majd hasonlítja össze. A végső (sokkoló) következtetés az, hogy a korábban megfogalmazott Seiberg-Witten Invariáns sejtés a régi változatban nem áll fent, azaz erősebb analitikus megszorításokat igényel.

Az [On the Ozsváth-Szabó invariant of negative definite plumbed...] mérföldkőnek számító, sok új eredményt, új objektumokat és új módszereket felsorakoztató cikk. Bevezeti a 'fokszámozott fa' fogalmát, amit egy rezoluciós gráfhoz (és a rajta élő *spin*^{c}-struktúrához) rendelünk hozza. Pontos algoritmust szolgáltat ezek kiszámolására a 'majdnem racionális' gráfok esetében. Továbbá, kiszámítja a Heegaard Floer homológiát ezen gráfokból. Végül a lencse terek és Seifert terek (gráfok) esetét teljesen kidolgozza. Ennek a cikknek az stratégiáját és algoritmusát követi a [On the Heggard-Floer homology of $S^3_{-d}(K)$...] cikk, amely ezen műtét sokaságok Heegaard-Floer homológiáját adja meg. Ezek a sokaságok nagyon fontosak a racionalis algebrai síkgörbék osztályozásában. Ez a kapcsolat több cikknek is a témája. A fő kapcsolat Heegaard Floer homológia nyelvén ad feltételt ilyen görbék létezésére. (Ez az utóbbi probléma egy nagyon régi nyílt kérdés, ilyen típusú megközelítése teljesen váratlan.)

A [Lattice cohomology...] cikk egy felület szingularitás topológikus típusához rendel hozza bizonyos invariánsokat, amelyekből sejtés szerint visszakapható a Heegaard Floer homológia. Ez az új invariáns (a 'rácspont homológia') szorosan összeköti az analitikus és topológikus invariánsokat, sőt kombinatorikus leírást is ad (ha a sejtés bizonyítódik) a Heegaard Floer homológiára (ami még nem létezik).

Az [Invariants of Newton non-degenerate..] cikk bizonyítja, hogy Newton nem-degenerált felület szingularitások topologikus típusai meghatározzák a szingularitást ekviszingularitás erejéig.

A [Milnor open books..] azt bizonyítja, hogy a felület szingulaitás topologiája egyértelműen meghatározza a csomón élő (és az analitikus típus által definált) kanonikus kontakt struktúrát. Továbbá, ez a struktúra kompatibilis (Giroux értelemben) minden (analitikus csira által kivágott) Milnor fibrálással.

Stipsicz András Heegaard Floer invariánsoknak egy új alkalmazását találta meg: P. Lisca, P. Ozsváth es Z. Szabóval írt közös cikkében kiterjesztette Legendre es transzverz csomók invariánsait a standard gömb esetéről tetszőleges 3-sokaságra. A kiterjesztett invariáns alkalmas peldául olyan csomók vizsgálatára, melyek túlcsavart kontakt struktúrákban élnek, de komplementumuk feszes. Ilyen jellegű eredmények eddig nem voltak elérhetők. Ozsváth Péterrel írt cikkében egy műtéti formulát talált ezekre az invariánsokra, mely formula segítségével transzverzálisan nem egyszerű, kis metszési szamú csomókat talált; pl. a 7_2 csomoról (melynek van 7 kettőspontú vetülete) látták be ezt a tulajdonságot.

Stipsicz folytatta Ozsváth-tal es Szabóval megkezdett Heegaard Floer homológia elméleti kutatásait, és belátták, hogy az elmélet egy verziója (melyet a lineáris polinomok gyűrűje felett definiálunk) kombinatorikusan kiszámítható, és részeredményeket kaptak a kvadratikus polinomgyűrű feletti eset kiszámítására is. Egy korábbi cikkben pedig akadályát találták annak, hogy egy kontakt struktúrának vele kompatibilis *planáris* nyílt könyv felbontása legyen.

Szabó és Stipsicz új egzotikus struktúrákat találtak egyszeresen összefüggő zárt 4–sokaságokon: belátták (egy Parkkal közös cikkben), hogy a komplex projektív sík ötszörös felfújtja (mint topológikus sokaság) végtelen sok egzotikus sima struktúrát hordoz.

Lisca és Stipsicz egy cikksorozatban vizsgálta zárt 3–sokaságok kontakt topológiáját; több érdekes eredmény mellett végülis teljes osztályozását találták azon Seifert fibrált 3-sokaságoknak, melyek nem hordoznak feszes kontakt struktúrát.

A. Korányi és **Szőke Róbert** On Weyl group equivariant maps (Proc. AMS, 134 (2006), 3449-3456) cikkenek tartalma: legyen $\mathbf{g}$ egy valós, féligegyszerű, nem kompakt típusú Lie algebra, θ egy Cartan involúció és $\mathbf{g} = \mathbf{k} + \mathbf{p}$ egy Cartan felbontás, $\mathbf{a} \subset \mathbf{p}$ egy maximális Abel altér, G egy összefüggő Lie csoport $\mathbf{g}$ Lie algebrával és K ennek maximális kompakt részcsoportja, $\mathbf{k}$ Lie algebrával és W a megfelelő Weyl csoport. Ekkor minden W-ekvivariáns $\mathbf{a}$-ból $\mathbf{a}$-ba menő polinomiális, C^∞, vagy valós-analitikus leképezés kiterjed egy K-ekvivariáns, $\mathbf{p}$-ből $\mathbf{p}$-be menő ugyanolyan simaságú leképezéssé. A kiterjesztés egyértelmű. Tovabba: Az 1. Tétel feltétele esetén legyen F egy $\mathbf{p}$-ből $\mathbf{p}$-be menő

K-ekvivariáns leképezés. Ha **g** nem hermitikus típusú (azaz a neki megfelelő szimmetrikus tér nem ilyen), akkor F szükségképpen radiális. Legyen most **g** hermitikus típusú és I a komplex struktúra **p**-n. Ha F_1, F_2 két tetszőleges **p**-ből **p**-be menő K-ekvivariáns radiális (polinomiális, C^∞, vagy valós-analitikus) leképezés, akkor $F = F_1 + IF_2$ egy **p**-ből **p**-be menő K-ekvivariáns (ugyanilyen simaságú) leképezés. Minden **p**-ből **p**-be menő K-ekvivariáns leképezés előáll ilyen alakban, egyértelmű módon.

A varratos sokaságokat, melyek peremes 3-sokaságok bizonyos extra struktúrával, Gabai definiálta, hogy 3-sokaságok fóliázásait tanulmányozza. Ezek centrálisnak bizonyultak a 3-sokaság-topológiában. **Juhász András** kiterjesztette az Ozsváth-Szabó invariánsokat varratos sokaságokra, és ezt az új invariánst sutured Floer homológiának, röviden SFH-nak, nevezte. Az SFH csoportok jól viselkedik varratos sokaság felbontások esetén – amikor is a varratos sokaságot egy felület mentén felvágjuk. Ezt a felbontási formulát használva egyszerűbb bizonyítást adtam azon eredményekre, melyek szerint a csomó Floer homológia felismeri a csomó génuszát, továbbá a fibráltságát.

Minden csomó S^3-ban határol egy irányitott, kompakt, peremes felületet, es az SFH csoportok alkalmasak a Sefiert-felületek tanulmányozására. Seifert felületekre két természetes ekvivalencia fogalom létezik, az erős és a gyenge. Kiderült, hogy az SFH minkettő vizsgálatára alkalmas. Juhasz megmutatta, hogy az SFH rangja felső korlátot ad egy csomó által határolt, páronként diszjunkt és páronként erős értelemben inekvivalens, minimális génuszú Seifert felületek számára, majd egy módszert talalt adott Seifert felület komplementuma esetén az SFH kiszámítására.

A varratos Floer elméletet továbbfejlesztve általánosította a fibrált csomó sejtést. Pontosabban belátta, hogy az SFH felső becslést ad a varratos sokaság mélységére. Végezetül megmutatta, hogy az SFH Euler-karaterisztikája varratos sokaágok egy torzió invariánsával egyezik meg. Ezt a torziót könnyű kiszámítani, és varratos sokaságok bizonyos osztályaira nagyon szép tulajdonságokkal bír.

Vértesi Vera Legendre, és transzverz csomók kapcsolatát vizsgálta Heegaard Floer homológiákkal. Egy Legendre csomó egy kontakt struktúrában, egy csomó, melynek érintői a kontakt struktúrát definiáló síkokban vannak, egy transzverz csomó pedig olyan csomó, melynek érintői transzverzálisak a síkokra. A közelmúltban definiált három Heegaard Floer homológiabeli invariáns egyikére Vértesi Vera belátott egy összefüggő összeg formulát. A formula segítségével sikerült végtelen sok nem transzverz egyszerű csomót mutatnia.

Stipsicz András és Vértesi Vera a Legendre csomók két Heegaard Floer homológiabeli invariánsai között találtak kapcsolatot; létezik a megfelelő homológiák között egy természetes leképezés, mely az egyiket a másikba viszi. E leképezés segítségével eltűnesi és nem–eltűnési tételeket bizonyítottak. Szintén a leképezés segítségével a twist csomók komplementumában pedig sikerült több kontakt struktúrat megkülönböztetni.