OTKA (F 049212) Zárójelentés

Vincze Csaba

1. Publikált eredmények

A kutatómunka témája a Riemann-sokaságoknál általánosabb differenciálgeometriai terek, az ún. Finsler-terek konform geometriájának vizsgálata. Egy sokaság - általánosságban szólva - akkor válik Finsler-sokasággá, ha az érintőtereken meg van adva egy-egy olyan funkcionál, ami az érintővektorok hosszának mérését lehetővé teszi. Az egységgömbök az origót a belsejükben tartalmazó, de nem feltétlenül centrálszimmetrikus konvex testek, melyek határa legalább C^4 - osztályú felület. Geometriai (és vizuális) szempontból ilyen alakzatok sima összefűzésével kapunk Finsler-sokaságot. A funkcionálsereg birtokában természetesen az alapsokaságon adott folytonosan differenciálható görbék ívhossza is számítható a szokásos integrálformula szerint. Az M sokaságon adott két funkcionálsereg akkor konform ekvivalens egymással, ha tagjaik pontonként egymás skalárszorosai. A Finsler-sokaságok általános vizsgálata fejlett kalkulatív eszközöket igényel, a teljes általánosságban fellépő [25] formulák bonyolultságára tekintettel pedig speciális tértípusok vizsgálata látszik célszerűnek.

Az ún. Berwald-sokaságokat például az tünteti ki, hogy az alapsokaságon megadható egy torziómentes lineáris konnexió úgy, hogy az általa indukált párhuzamos eltolások megőrzik az érintővektorok Finsler-féle hosszát (vagyis a lineáris konnexió kompatibilis a Finsler-féle metrikus struktúrával). Ez az egyik legismertebb tértípus, ha nem is a konform geometria szempontjából nézve. A kutatómunkát motiváló alapkérdés ugyanis az a M. Matsumoto, a Japán Finsler-geometriai iskola vezető kutatója által 2001-ben felvetett probléma [11], hogy léteznek-e nem triviálisan konform ekvivalens Berwald-sokaságok (a triviális ekvivalencia azt jelenti, hogy a funkcionálok közötti pontonként fellépő skalárszorzó ponttól függetlenül is konstans). A kérdésre 2003-ban tagadó választ sikerült adni a [25] dolgozatban, azonban csak egy további, a címben is jelzett feltétel mellett, nevezetesen, ha az indikátrixfelületek szekcionális görbülete mindig pozitív egy a Finsler-funkcionálból konstruált Riemann-struktúrára nézve - ez utóbbi a vertikális résznyalábon adott Riemann-metrika (a Riemann-geometriából ismert Sasaki-metrika általánosítása). A kutatómunka keretén belül először is ezt az eredményt sikerült továbbfejleszteni a [22] és [24] dolgozatokban. Fő eredményünk szerint két Berwald-sokaság közötti konform ekvivalencia mindig triviális hacsak nem Riemann-sokaságokról van szó (az indikátrixfelületre vonatkozó feltevést tehát sikerült eliminálni). Ez fontos mozzanat, hiszen minden további lépés ennek függvénye volt, nevezetesen egy kevésbé ismert tértípus, az ún. Wagner-sokaságok struktúrájának leírása. Ezeknek esetében ugyancsak létezik a Finsler-féle metrikus struktúrával kompatibilis lineáris konnexió az alapsokaságon, de nem torziómentes, hanem szemiszimmetrikus, azaz torziótenzora a

$$T(X,Y)=\frac{1}{2}(X\alpha Y-Y\alpha X)$$

képlet szerint hat, ahol α egy az alapsokaságon adott sima függvény. Segítségével minden Wagner-sokaság esetén egy vele konform ekvivalens Berwald-sokaság konstruálható és megfordítva, ha egy Finsler-sokaság konform ekvivalens egy Berwald-sokasággal, akkor Wagner-sokaság. Ez Hashiguchi és Ichijyo klasszikus tétele, azonban nem oldja meg a Wagner-sokaságok belső geometriai leírásának problémáját: hogyan fejezhető ki ez a bizonyos α függvény a sokaság közvetlenül számítható adataival?

A Matsumoto-, illetve a Wagner-sokaságok belső geometriai leírására vonatkozó probléma ott kapcsolódik össze, hogy a (nem Riemann) Berwald sokaságok közötti triviális konform kapcsolat maga után vonja az α függvény egyértelműségét (legalábbis additív konstans erejéig), ami azt jelenti, hogy a (nem Riemann) Finsler-féle metrikus struktúrával kompatibilis konnexió egyértelműen meghatározottá válik a Wagner-sokaságok esetében. Ez természetesen fontos motiváció. A Matsumoto probléma tisztázása után tehát ebben az irányban folytattunk kutatásokat. Érdekes speciális eset egy explicit képlettel leírható tértípus, az ún. Randers-sokaságoké. Itt a Finsler-féle alapfüggvény konstrukciójához egy Riemann-féle metrikus tenzorból származó normát deformálunk egy additív lineáris taggal (1-forma). A [21] dolgozatban sikerült egy parciális differenciálegyenletrendszer megoldására visszavezetni a problémát és azoknak a Riemann-sokaságoknak a lokális struktúráját leírni, melyek megengedik a Riemann-féle metrikus tenzorból származó normafüggvény lineáris deformációját úgy, hogy Wagner-sokaságot kapjunk. Érdekesség, hogy a konstans görbületű Riemann-sokaságok közül egyedül a negatív görbületű (hiperbolikus tér) jöhet szóba. Ezek Wagner-sokasággá deformált osztályát nevezi Szabó Zoltán Bolyai-Lobacsevszkij-Finsler-féle térnek. A Randers-terek speciális funkcionáljaival végzett számítások arra a gondolatra vezetnek, hogy a Wagner-sokaságok belső geometriai leírásának problémáját egy olyan, az alapsokaságon adott Riemann-struktúra segítségével oldhatjuk meg, ami a Finsler-funkcionál származtatási módjától függetlenül a rendelkezésünkre áll és speciális esetekben kompatibilis a Finsler-féle metrikus struktúrával. Szabó Zoltán [17] megmutatta, hogy Berwald-sokaságok esetén az alapsokaságon adott és a Finsler-féle metrikus struktúrával kompatibilis, torziómentes lineáris konnexió mindig Riemann-metrizálható. Bizonyítása a Lie-csoportok elméletén alapszik. Az általunk adott bizonyítás szerint viszont direktebb módon, a vertikális résznyalábon adott Riemann-metrika indikátrixfelületen vett integráljával is metrizálhatunk. Az előrelépés abban áll, hogy ez természetesen nem csupán a Berwald-sokaságok, hanem tetszőleges Finsler-sokaság esetén is lehetséges és a [23] dolgozat fő eredménye szerint, ha egy lineáris konnexió kompatibilis a Finsler-féle metrikus struktúrával, akkor ezen a módon mindig Riemann-metrizálható, a torzió speciális formájától függetlenül. Ennek a Finsler-sokasághoz csatolt kanonikus Riemann metrikának a segítségével sikerült a Wagner-sokaságok torziójában szereplő α függvényre egy differenciálegyenletrendszert felírni [24] és ezzel a belső geometriai jellemzés problémáját a speciális esethez hasonlóan megoldani. A Randers-sokaságoknál viszont a csatolt Riemann-sokaság struktúrájára vonatkozóan is született eredmény és a kutatómunka következő állomása ennek a fázisnak az általánosítása volt (illetve jelenleg is folyamatban van).

Az alapprobléma tehát: adott egy Riemann-sokaság, milyen feltételek mellett ,,építhetünk" rá egy nem Riemann Wagner-sokaságot? Szabó Zoltán Berwald-sokaságokra vonatkozó elmélete ennek a kérdésnek azt a speciális változatát válaszolja meg, mely a Berwald-sokaságokra vonatkozik. Arról van szó, hogy a Riemann-sokaság egy adott (akár a torziómentes Lévi-Civita, akár egy szemiszimmetrikus) metrikus lineáris konnexióját átmetrizáljuk egy Finsler-féle metrikus struktúrával. Ekvivalens módon, hogy megadjunk egy olyan Finsler-féle funkcionált, mely a szóban forgó lineáris konnexió holonómiacsoportjával szemben invariáns. Ezek után a párhuzamos eltolás segítségével a metrikus struktúra a teljes sokaságra kiterjeszthető. Erre nyílván csak akkor van remény, ha a holonómiacsoport nem tranzitív az érintőterek egységgömbjein, ami a Lévi-Civita konnexió (azaz a Berwald terekre vonatkozó kérdés) esetében arra vezet, hogy vagy lokálisan reducibilis, vagy lokálisan irreducibilis, 1-nél nagyobb rangú lokálszimmetrikus Riemann-sokaságról van szó. Ez a Berwald-sokaságokra vonatkozó Szabó Zoltán - féle struktúratétel alapja, ami M. Berger és J. Simons [16] egy Riemann-sokaság Lévi-Civita konnexiójának holonómiacsoportjával kapcsolatos vizsgálataira épül. Szabó Zoltán bebizonyította, hogy a lokálisan reducibilis, illetve lokálisan irreducibilis, 1-nél nagyobb rangú lokálszimmetrikus Riemann-sokaság esetében az átmetrizálás valóban lehetséges. Ehhez a Liecsoportok és Lie-algebrák klasszikus elméletén át vezetett az út. Az általunk követett módszer elkerüli ezeket a klasszikus nagy elméleteket és egy újnak tekinthető elmélet, az általánosított kúpszeleteken keresztül oldja meg az átmetrizálási problémát és nem csak Berwald-sokaságok esetében.

Általánosított kúpszeleten az n - dimenziós valós koordinátatér olyan alakzatát értjük, melynek pontjaira egy rögzített G halmaz pontjaitól mért átlagos távolság ugyanakkora. A G halmaz elemeit nevezzük fókuszoknak. A fókuszok nem feltétlenül véges számosságú ponthalmazt alkotnak, mint ahogy a távolságmérés során sem feltétlenül az euklideszi távolság játszik szerepet. Mindezeken túl az átlagolási eljárásra vonatkozóan is különbözőképpen járhatunk el: súlyozott (de véges) összegek, integrál stb. Ebbe a koncepcióba a szakirodalomban fellelhető valamennyi általánosított kúpszeletprobléma beilleszthető. A klasszikusok közül említést érdemel a multifokális ellipszisek témaköre, melyek pontjaira a véges G halmaz pontjaitól mért távolságok összege (vagy, ha úgy tetszik, számtani közepe) állandó. A többfókuszú ellipszisek természetes módon bukkannak fel optimalizálási feladatokban. Ezek közös eredete a Fermat - probléma mely körülbelül a XVIII század közepére datálható: egy adott ABC háromszög síkjában keressük meg azt a P pontot, melyre a PA, PB és a PC távolságok összege a minimális! Ismeretes, hogy a háromszöglemez belsejének éppen arról a pontjáról van szó, melyből mindhárom oldal $120°$-os szögben látszik, feltéve, hogy a háromszögnek nincs ekkora, vagy ennél nagyobb szöge. Ha mégis, akkor a megoldás éppen az a csúcs, ahol a kritikus szög fellép, illetve a kritikusnál nagyobb szög található. Tetszőleges, de véges sok fókuszpont esetén is ismert a minimumhely jellemzése (E. Weiszfeld, 1937). Vázsonyi Endre vetette föl a kérdést, hogy valamely konvex, zárt síkgörbe tetszőlegesen approximálható-e többfókuszú ellipszissel, ha a fókuszok száma elég nagy. A válasz tagadó ugyanis Erdős Pál és Vincze István bebizonyították, hogy egy egyenlő oldalú háromszög nem közelíthető meg tetszőleges pontossággal ilyen módon. Tételük egy friss feldolgozása található a [19] dolgozatban, mely az első lépést jelentette az általánosított kúpszeletek tanulmányozása felé.

A multifokális ellipszisek olyan lineáris konnexiók átmetrizálására alkalmazhatók, melyek holonómiacsoportja invariánsan hat a fókuszok (véges) halmazán; ez a gondolat már szerepel a [20] dolgozatban. Ennek általánosításaként vetődött fel egy olyan kúpszeletfogalom kidolgozása, melynél a fókuszok nem véges, de geometriai szempontból kezelhető halmazt (görbét, felületet stb.) alkotnak, az átlagos távolságot pedig integrálással határozzuk meg. Ezek elmélete azonban gyerekcipőben jár, ugyanis - általánosságban szólva - gyökös kifejezések integrálása a feladat, melyek már a legegyszerűbb (nemtriviális) görbék, illetve felületek (körök, illetve gömbök) esetében is elliptikus integrálokat adnak. Valószínűleg ennek a komoly technikai problémának köszönhető, hogy ez a fajta kúpszeletfogalom, amit Gross és Strempel [8] cikkük *open problems* címszava alatt szerepeltet, mint lehetséges általánosítást, ezideig kiaknázatlan maradt. Történt azonban az évek során néhány áttörés: 2004-ben, illetve 2005-ben cikkek jelentek meg H. Alzer és S-L. Qiu [2], illetve K. C. Richards [14] szerzőktől elliptikus integrálokra, illetve a Gauss-féle hipergeometrikus függvényre vonatkozó becslésekről. Segítségükkel sikerült ezt a kúpszeletfajtát beépíteni a Wagner-sokaságok elméletébe, mint olyat, mely a csatolt Riemann-struktúrára nézve metrikus lineáris konnexiók holonómiacsoportját nem Riemann-féle értelemben átmetrizálja, feltéve, hogy a holonómiacsoport nem tranzitív az érintőterek Riemann-metrikából származó egységgömbjein. A reducibilis esetben ugyanis az invariáns altér által a gömbből kimetszett alacsonyabb dimenziós gömböket szerepeltethetjük, mint fókuszcsaládot, irreducibilis esetben pedig az orbitok konvex burkát. Mindkét esetben kérdés, hogy nem ellipszoid adódik-e, melynek eldöntésére az elliptikus integrálokra, illetve a Gauss-féle hipergeometrikus függvényre vonatkozó becsléseket használtuk fel. Ennek az elméletnek a kifejlesztésén most is dolgozunk, de a lényeges gondolatok már szerepelnek a tanítványaimmal közösen írt [18] dolgozatban [1], illetve az *Examples and notes on generalized conics and their applications*, *An introduction to the theory of generalized conics and their applications* c. dolgozatokban. Ezek közül az első a 2009 májusában rendezett Workshop on Finsler Geometry and Its Applications (Debrecen, Hungary) konferencián elhangzott előadás anyaga, a második pedig közlésre benyújtott dolgozat (London Math. Soc.) Mivel itt még nem publikált eredményekről van szó, a következő fejezetben a körvonal esetét szeretném bemutatni, a cikkek anyagából merítve: a fókuszsereg tehát körvonal, az átlagos távolságot pedig görbementi integrállal számítjuk ki.

[1] Nem tartozik ugyan a szigorúan vett szakmai jelentéshez, de örömmel számolhatok be arról, hogy egyik tanítványom a 2009-es Szombathelyen rendezett OTDK versenyen különdíjas lett a témában írt dolgozattal.

2. Examples and notes on generalized conics and their applications

Let $\gamma\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) := (\cos t, \sin t, 0)$ be the unit circle in the xy-coordinate plane and

$$F(x,y,z) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sqrt{\big(x-\cos t\big)^2 + \big(y-\sin t\big)^2 + z^2}\,dt.$$

The surface of the form $F(x,y,z)=\frac{8}{2\pi}$ is a generalized conic with foci S_1 in the Euclidean space $\mathbb{R}^3$. It is obviously a revolution surface with generatrix

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{\cos^2 t + \big(y-\sin t\big)^2 + z^2}\,dt = 8$$

in the yz-coordinate plane.

Lemma 1. *The surface $F(x,y,z)=\frac{8}{2\pi}$ is not an ellipsoid.*

Proof. It is enough to prove that the generatrix

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{\cos^2 t + \big(y-\sin t\big)^2 + z^2}\,dt = 8$$

is not an ellipse in the yz-coordinate plane. If $y=0$ then we have that

$$z = \pm\sqrt{\left(\frac{8}{2\pi}\right)^2 - 1}.$$

On the other hand, if $z=0$ then the solutions of the equation

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{\cos^2 t + \big(y-\sin t\big)^2}\,dt = 8$$

are just $y=\pm 1$. Therefore the only possible ellipse has the parametric form

$$y(s) = \cos s \quad\text{and}\quad z(s) = \sqrt{\left(\frac{8}{2\pi}\right)^2 - 1}\,\sin s.$$

The figure shows the generatrix (pointstyle) and its approximating ellipse.

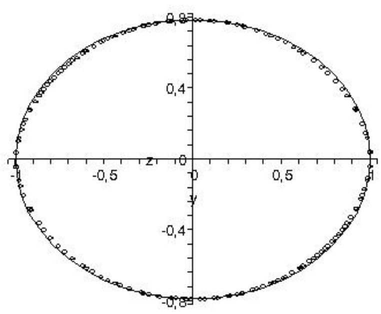

Figure 1. The generatrix and its approximating ellipse.

Consider the auxiliary function

$$v(s) := \int_0^{2\pi} \sqrt{\cos^2 t + \big(y(s) - \sin t\big)^2 + z^2(s)}\, dt.$$

It can be written into the form

$$v(s) = 4h(s) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - r^2(s)\sin^2 t}\, dt = 4h(s)\mathcal{E}(r(s)),$$

where

$$\mathcal{E}(r) := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - r^2 \sin^2 t}\, dt, \qquad 0 < r < 1$$

is the complete elliptic integral of second kind,

$$h(s) := \sqrt{(1 + y(s))^2 + z^2(s)} \quad \text{and} \quad \frac{1}{4} r^2(s) := \frac{y(s)}{h^2(s)} > 0$$

provided that $-\frac{\pi}{2} < s < \frac{\pi}{2}$. In terms of the Gaussian hypergeometric function

$$\mathcal{E}(r) = \frac{\pi}{2} F(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; r^2)$$

and Richards's result [14] states that

$$\mathcal{E}(r) \geq \frac{\pi}{2} M_p\Big(1, \sqrt{1 - r^2}\Big), \quad \text{where} \quad p = \frac{3}{2} \quad \text{and} \quad M_p(x, y) := \left(\frac{x^p + y^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}}$$

is the p-th power mean of its arguments; see also [2]. Thus we have

$$v(s) \geq 2\pi h(s) M_p\Big(1, \sqrt{1 - r^2(s)}\Big).$$

Consider the function $g(s) := 2\pi h(s) M_p\Big(1, \sqrt{1 - r^2(s)}\Big)$, $0 \leq s \leq 2\pi$ having the properties

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right) = 8, \quad g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad \text{and} \quad g''\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0.$$

Here we prove that g^2 attains its local minimum at $s = \frac{\pi}{2}$. By the help of a straightforward calculation

$$\frac{1}{4\pi^2}(g^2)'\left(\frac{\pi}{2}\right) = (h^2)'\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2} h^2\left(\frac{\pi}{2}\right)(r^2)'\left(\frac{\pi}{2}\right) D_2 M_p^2(1, 1)$$

and

$$\begin{aligned}\frac{1}{4\pi^2}(g^2)''\left(\frac{\pi}{2}\right) &= (h^2)''\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2}(h^2)'\left(\frac{\pi}{2}\right) D_2 M_p^2(1, 1)(r^2)'\left(\frac{\pi}{2}\right) - \\ &- \frac{1}{4} h^2\left(\frac{\pi}{2}\right) D_2 M_p^2(1, 1)\left(2(r^2)'' + (r^2)'\left(\frac{\pi}{2}\right)(r^2)'\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) + \\ &+ \frac{1}{4} h^2\left(\frac{\pi}{2}\right) D_2 D_2 M_p(1, 1)(r^2)'\left(\frac{\pi}{2}\right)(r^2)'\left(\frac{\pi}{2}\right),\end{aligned}$$

where

$$h^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{8}{2\pi}\right)^2, \quad (h^2)'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2, \quad (h^2)''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\left(2 - \left(\frac{8}{2\pi}\right)^2\right)$$

and

$$D_2 M_p^2(1, 1) = 1, \qquad D_2 D_2 M_p^2(1, 1) = \frac{p}{2}.$$

On the other hand $r^2(s)h^2(s) = 4\cos s$ which means that

$$r^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad (r^2)'\left(\frac{\pi}{2}\right) h^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = -4, \quad \text{and} \quad (r^2)''\left(\frac{\pi}{2}\right) h^4\left(\frac{\pi}{2}\right) = 8(h^2)'\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

We have $\frac{1}{4\pi^2}(g^2)'\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$ and

$$\frac{1}{4\pi^2}(g^2)''\left(\frac{\pi}{2}\right)=(h^2)''\left(\frac{\pi}{2}\right)-(4-2p)h^{-2}\left(\frac{\pi}{2}\right)=(h^2)''\left(\frac{\pi}{2}\right)-h^{-2}\left(\frac{\pi}{2}\right)>0$$

as it can be easily seen. Therefore g attains its local minimum at $s=\frac{\pi}{2}$ and there must be a parameter $0<s_*<\frac{\pi}{2}$ such that $8<g(s_*)\leq v(s_*)$, i.e. $v(s)$ is not a constant function.

References

[1] I. Agricola and T. Friedrich, *On the holonomy of connections with skew-symmetric torsion*, Math. Ann. 328 (2004), 711-748.

[2] H. Alzer and S.-L- Qui, *Monotonicity theorems and inequalities for the complete elliptic integrals*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 172 (2004), 289-312.

[3] A. Borel, *Some remarks about Lie groups transitive on spheres and tori*, Bull. Amer. Math. Soc., Vol. 55, No. 6 (1949), 580-587.

[4] A. Borel, *Le plan projectif des octaves et les sphéres comme espaces homogénes*, C. R. Acad. Sci. Paris 230 (1950), 1378-1380.

[5] J. M. Borwein and A. S. Lewis, *Convex analysis and Nonlinear Optimization*, CMS Books in Mathematics, 2000.

[6] P. Erdős and I. Vincze, *On the approximation of closed convex plane curves*, Mat. Lapok 9 (1958), 19-36 (in Hungarian, summaries in Russian and German). MR 20 6070.

[7] A. Gray and P. Green, *Sphere transitive structures and triality authomorphisms*, Pacific Journal of Math., Vol. 34, No. 1 (1970), 83-96.

[8] C. Gross and T.-K. Strempel, *On generalizations of conics and on a generalization of the Fermat-Toricelli problem*, Amer. Math. Monthly, 105 (1998), no. 8, 732-743.

[9] S. R. Lay, *Convex Sets and Their Applications*, 1982 John Wiley & Sons, Inc.

[10] J. M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, 2003 Springer-Verlag New York, Inc.

[11] M. Matsumoto, *Conformally Berwald and conformally flat Finsler spaces*, Publ. Math. Debrecen, 58 (1-2) (2001), 275-285.

[12] D. Montgomery and H. Samelson, *Transformation groups on spheres*, Annals of Math., Vol 44, No.3 (1943), 454-470.

[13] Á. Nagy, Zs. Rábai and Cs. Vincze, *On a special class of generalized conics with infinitely many focal points*, TMCS, 7/1 (2009), 87-99.

[14] K. C. Richards, *Sharp power mean bounds for the Gaussian hypergeometric function*, J. Math. Anal. Appl. 308 (2005), 303-313.

[15] Z. Shen, *Differential Geometry of Spray and Finsler Spaces,* Kluwer Academic, Dordrecht, 2001.

[16] J. Simons, *On the transitivity of holonomy systems*, Annals of Math., Vol. 76, No. 2 (1962), 213-234.

[17] Z. I. Szabó, *Positive definite Berwald spaces*, Tensor N. S. 35 (1981), 25-39.

[18] Á. Nagy, Zs. Rábai and Cs. Vincze, *On a special class of generalized conics with infinitely many focal points*, TMCS 7/1 (2009), 87-99.

[19] Cs. Vincze and A. Varga, *On a lower and upper bound for the curvature of ellipses with more than two foci*, Expo. Math. 26 (2008), 55-77.

[20] Cs. Vincze, *On Berwald and Wagner manifolds*, J. AMAPN, 24 (2008), 169-178.

[21] Cs. Vincze, *On an existence theorem of Wagner manifolds*, Indag. Mathem., N.S., 17 (1) (2006), 129-145.

[22] Cs. Vincze, *On geometric vector fields of Minkowski spaces and their applications*, Diff. Geom. and Its Appl. 24 (2006), 1-20.

[23] Cs. Vincze, *A new proof of Szabó's theorem on the Riemann-metrizability of Berwald manifolds*, J. AMAPN, 21 (2005), 199-204.

[24] Cs. Vincze, *On a scale function for testing the conformality of Finsler manifolds to a Berwald manifold*, Journal of Geometry and Physics. 54 (2005), 454-475.

[25] Cs. Vincze, *On conformal equivalence of Berwald manifolds all of whose indicatrices have positive curvature*, SUT J. of Math. Vol 39, No.1 (2003), 15-40.

3. Konferenciák és előadások

A Zárójelentésben ismertetett eredményekről a következő nemzetközi konferenciákon adtam elő:

1. *Differential Geometry and Physics*, 29 August - 2 September, 2005, Budapest, Hungary

2. *Applied Complex and Quaternionic Approximation vs. Finslerian Structures*, 18-25 July 2006, Bedlewo, Poland

3. *Finsler extension of Relativity theory*, 4-10 November, 2006, Cairo, Egypt

4. *Workshop on Finsler Geometry and Its applications*, 28 May - June 2, 2007, Balatonföldvár, Hungary

5. *Workshop on Finsler Geometry and Its applications*, May 25-30, 2009, Debrecen, Hungary.

Legújabb fejlemény pedig két előadói meghívás a Nankai Egyetemen (China) rendezendő Finsler geometriai konferenciára, illetve a Finsler Extensions of Relativity Theory konferenciára (Moszkva) az idei évben.